

В. Ю. ВОЛКОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)

В. Ю. Волков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

СПб ГУТ)))

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018**

УДК 621.369(075.8)
ББК 32.84я73
В 67

Рецензенты:
кандидат технических наук,
доцент кафедры радиосистем Санкт-Петербургского
государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»
А. С. Маругин,
доктор технических наук, профессор кафедры радиосвязи и вещания СПбГУТ
Ю. А. Ковалгин

*Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ
в качестве учебного пособия*

Волков, В. Ю.

В 67 Математические методы в теории радиотехнических систем.
Обнаружение и различение сигналов : учебное пособие / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2018. – 100 с.
ISBN 978-5-89160-165-9

Написано в соответствии с рабочими программами дисциплин:
«Математические методы в теории радиотехнических систем», «Современные методы обработки сигналов и полей».

Обсуждаются важные понятия теории обнаружения и оценивания сигналов. Рассмотрены примеры обнаружения изменений параметров распределений решающих статистик и различения вероятностных распределений, вопросы точного и приближенного расчета характеристик обнаружения, приведены конкретные примеры и алгоритмы обработки сигналов применительно к радиотехническим задачам.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки высшего образования 11.03.01 и 11.04.01 «Радиотехника», аспирантов и специалистов в данной области.

**УДК 621.369(075.8)
ББК 32.84я73**

ISBN 978-5-89160-165-9 © Волков В. Ю., 2018

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРИЕМ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.....	4
1.1. Задачи обработки сигналов	4
1.2. Анализ и синтез алгоритмов обработки сигналов	7
1.3. Функция правдоподобия и отношение правдоподобия	9
1.4. Сигналы и помехи на выходе приемника	14
1.5. Оптимальное обнаружение и различение сигналов	19
1.6. Параметры обнаружения и отношение сигнал/шум	24
1.7. Рабочие характеристики приемника и характеристики обнаружения	27
2. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ОДНОКРАТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ	33
2.1. Обнаружение сдвига гауссовского распределения	33
2.2. Обнаружение изменения дисперсии гауссовского распределения	36
2.3. Обнаружение изменения масштаба экспоненциального распределения	39
2.4. Обнаружение изменения масштаба рэлеевского распределения	41
2.5. Обнаружение изменения параметра распределения Пуассона	42
2.6. Обнаружение изменения параметров логнормального распределения	46
2.7. Обнаружение изменения параметра масштаба гамма-распределения	49
3. РАЗЛИЧЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	52
3.1. Различение экспоненциального и рэлеевского распределений	52
3.2. Различение рэлеевского и логнормального распределений	54
3.3. Различение экспоненциального и логнормального распределений	57
3.4. Различение распределений Вейбулла	60
3.5. Различение гамма-распределений	62
4. ОБРАБОТКА МНОГОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ	65
4.1. Случай независимой гауссовской выборки	65
4.2. Случай независимой негауссовской выборки	73
4.3. Общая гауссовская задача	80
4.4. Корреляционный обнаружитель детерминированного сигнала	83
4.5. Фильтровой обнаружитель детерминированного сигнала	89
4.6. Фильтрация детерминированного сигнала в дискретном времени	94
Список литературы	99

1. ПРИЕМ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1.1. Задачи обработки сигналов

Обработкой сигналов в радиотехнике называется их преобразование в тех или иных целях. Основной целью обработки обычно является получение, извлечение или восстановление информации, т. е. решение *задачи приема*. Эта задача включает четыре элемента: *событие, сигнал, наблюдение, решение*, конкретизация которых приводит к частным задачам, причем задачи обнаружения и различения сигналов являются наиболее простыми [1–5].

Событиями являются объективно существующие объекты и явления, например, нахождение самолета в пространстве с определенными координатами (дальностью, углами визирования), его полет с некоторой скоростью и ускорением, речевое сообщение как процесс изменения звукового давления, изображение как распределение яркости и цвета по пространственным координатам и т. д. События происходят независимо от последующих действий, они не зависят ни от вида радиотехнической системы, ни от способа обработки и принятия решений.

Сигналы радиотехнических систем должны нести информацию о событиях, которая заключается в изменениях модуляции информационных параметров, таких как частота, фаза, амплитуда, поляризация несущей частоты радиоизлучения. В частности, речевое сообщение может передаваться изменениями амплитуды, а может кодироваться с последующей передачей кода фазовой модуляцией, как это делается в мобильной связи. Время задержки радиоимпульса в радиолокации несет информацию о дальности до цели, а сдвиг частоты заполнения – о ее радиальной скорости.

Таким образом, сигнал как элемент задачи приема уже зависит от вида радиотехнической системы (локационная или связная), выбранного диапазона, вида модуляции, метода измерения координат и скорости и ряда других факторов, а главное, сигнал зависит от частной задачи приема, которые можно перечислить в порядке усложнения:

- обнаружение сигналов;
- различение сигналов;
- многоальтернативное обнаружение;
- оценивание (измерение) параметров сигналов;
- фильтрация процессов и сообщений;
- совместное обнаружение-измерение;
- разрешение сигналов.

Этот список может быть расширен, например за счет включения идентификации модели в условиях неопределенности, классификации сигналов на основе обучающих выборок, распознавания образов и др. [6–9].

Предположение о событии называется *гипотезой*. Таким образом, гипотеза H_0 есть предположение об отсутствии полезного сигнала в наблюдении (т. е. наблюдение представляет одну помеху $y(t) = \eta(t)$, а гипотеза (альтернатива) H_1 соответствует наличию полезного сигнала так, что $y(t) = \varphi(s(t), \eta(t))$. Функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ описывает вид взаимодействия полезного сигнала и помехи. Полезный сигнал, помеха и вид их взаимодействия существенно зависят от свойств канала (связи или локации). В случае аддитивного взаимодействия $y(t) = s(t) + \eta(t)$, но бывают и более сложные функции (например, аддитивно-мультипликативные).

Конечным результатом при решении *задачи различения* является принятие *решения* d_i относительно *события* e_i , которое связано с определенным *сигналом* $s_i(t)$ из заданного набора M сигналов $s_1(t), \dots, s_M(t)$. Таким образом, при различении увеличивается число событий (гипотез) H_1, \dots, H_M и число решений d_1, \dots, d_M . Обычно при различении считается, что какой-то из сигналов обязательно присутствует. Если это не так, то вводится нулевое событие e_0 , означающее отсутствие полезного сигнала, и нулевая гипотеза. Такая формулировка задачи соответствует *многоальтернативному обнаружению*.

Задачи обнаружения и различения типичны для локационных и связанных систем. В системах связи задача различения решается демодулятором при приеме дискретных сообщений.

Измерение параметров сигнала представляет собой другую важную задачу приема. В этом случае сигнал $s(t, \theta)$ включает параметры модуляции $\theta = (\tau, F)$, которые связаны с событием, например временное запаздывание τ и частотный сдвиг F . В задаче фильтрации сигнал $s(t, x(t))$ содержит информационный процесс $x(t)$, изменяющийся во времени (или по пространству), и требуется получить оценки его значений в разные моменты времени или в разных точках пространства.

Наблюдение $y(t)$ представляет собой процесс (электрический) в некоторой точке радиоприемного тракта (на входе приемника, на выходе детектора и т. д.). Общая структура приемной системы изображена на рис. 1.1.1.

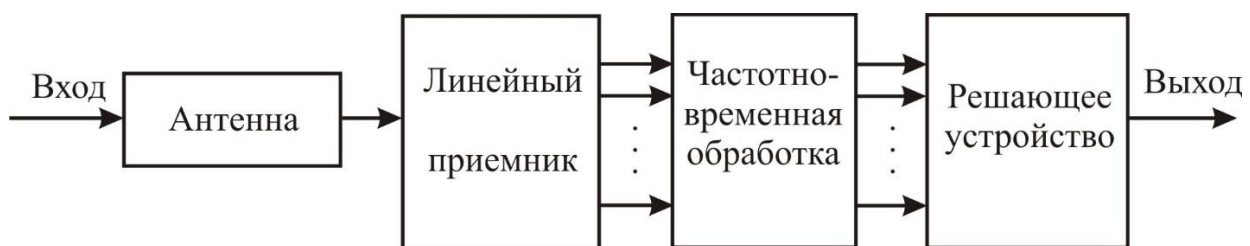


Рис. 1.1.1. Общая структура приемной части радиотехнической системы

Выбор точки, в которой рассматриваются наблюдения, зависит от того, какая часть тракта исследуется. Всегда имеется некоторая предварительная обработка входного радиоизлучения, связанная с видом радиосистемы. Эта предварительная обработка включает пространственную, поляризационную и частотную селекцию в антенном устройстве, частотную и временную селекцию в приемнике, синхронное или амплитудное детектирование, или последующую низкочастотную фильтрацию. Таким образом, наблюдение обычно представляет собой низкочастотный процесс в одном или нескольких каналах (в случае изображений это может быть фотоприемная матрица). Задачи обработки, т. е. преобразование наблюдений в решения в настоящее время решаются в основном цифровыми устройствами. Тогда решающее устройство реализуется на микропроцессоре программным путем.

С учетом дискретизации по времени и многоканальной обработки исходное наблюдение можно представить массивом данных или *выборкой* $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Множество возможных значений (реализаций) выборки образует *множество наблюдений* Y .

Наблюдения зависят от вида излучения, формы полезного сигнала, типа помехи и вида ее взаимодействия с сигналом, а также от структуры предварительной обработки. Решения d_k , принимаемые в пользу гипотез H_k , а также формируемые оценки параметров зависят как от самих событий, так и от наблюдений и способа обработки, т. е. от вида радиотехнической системы и алгоритма обработки. Наблюдения служат исходным материалом для формирования решающих статистик в решающем устройстве, а последние используются для принятия решений или формирования оценок.

Задачи оценивания и фильтрации решаются измерительными системами. По принципу построения измерительная система (системы извлечения информации, к которым относятся радиолокационные и радионавигационные системы) может быть *следающей* (замкнутой) либо *неследающей* (поисковой). В следящих измерителях вместо самих величин измеряются их отклонения от соответствующих опорных значений.

Неследающие системы осуществляют наблюдение (мониторинг) за окружающим пространством, но могут осуществлять и слежение за интересующими объектами. Влияние внешних (активных и пассивных) помех и собственных шумов проявляется в ошибках измерительных и решающих устройств, поэтому обработка сигналов должна обеспечивать достаточную помехоустойчивость системы.

Общая структура замкнутой измерительной системы представлена на рис. 1.1.2. Наблюдения формируются на выходе усилительно-преобразовательного устройства, а вычислительное устройство принимает решения, и вырабатывает оценки. Эти решения и оценки используются для управления состоянием системы (параметрами антенны и приемного устройства). Формирование оценок параметров сигналов, принимаемых на фоне помех,

называется *фильтрацией*. В широком понимании фильтрация включает не только получение оценок параметров, но и автоматическое обнаружение сигналов, а также принятие решений о переходе в тот или иной режим наблюдения и обработки [3]. В более узком и традиционном смысле фильтры понимаются как линейные устройства в составе приемной части системы.



Рис. 1.1.2. Структура радиотехнической системы извлечения информации (радиоизмерителя)

Фильтрация сигналов осуществляется обычно на всех этапах обработки. Пространственная фильтрация в антенном устройстве обеспечивает формирование соответствующей диаграммы направленности (например, с провалом в направлении на источник помехи). Для импульсной РЛС фильтрация на этапе *первичной* внутрипериодной обработки осуществляется приемником, а на этапе межпериодной обработки – накопителем импульсов. Процесс *вторичной* (траекторной) обработки включает фильтрацию сигналов с учетом динамики движения объекта, что реализуется специальным вычислительным устройством.

1.2. Анализ и синтез алгоритмов обработки сигналов

Задача *синтеза* имеет целью получение алгоритма обработки как последовательности преобразований наблюдения для получения решения. Обычно алгоритм представляется в виде структурной или функциональной схемы. Нахождение алгоритма может произойти в ходе решения задачи оптимизации, т. е. поиска экстремума некоторой скалярной целевой функцией, учитывающей имеющиеся показатели качества. Алгоритм, который обеспечивает экстремум такого единого показателя качества, будет *оптимальным* (наилучшим), а величина показателя характеризует *критерий оптимальности* для рассматриваемых алгоритмов. Однако возможны инженерный (или эвристический) синтез, когда алгоритм находится перебором работоспособных вариантов, и эмпирический синтез, когда алгоритм строится экспериментальным путем и т. д.

Вполне возможно, что полученный некоторым путем алгоритм будет иметь показатель качества со значением, близким к предельному для

заданных условий, т. е. алгоритм будет *квазиоптимальным* («почти» оптимальным). Вычисление этого показателя качества для данного алгоритма входит в задачу *анализа*. Таким образом, задачи синтеза и анализа неразрывно связаны и должны решаться совместно.

Для синтеза и анализа алгоритмов обработки сигналов требуется математическое описание свойств основных элементов задачи (событий, сигналов, наблюдений и решений), т. е. *статистическая модель*. Качество алгоритма характеризуется вероятностями ошибок или единым показателем, вытекающим из принятого *критерия оптимальности*. Для получения (синтеза) алгоритма обработки следует применить определенный *метод*, приводящий к оптимальному или неоптимальному решению. Методы различаются тем, как они используют модель, какой выбран критерий, и какие ограничения на класс алгоритмов являются приемлемыми. Например, часто требуется найти наилучший алгоритм в классе *линейных*, т. е. обеспечивающих выполнение принципа суперпозиции. Другим видом ограничений являются ограничения на *сложность* алгоритма и *время* обработки, которые обычно зависят от числа простейших операций, выполняемых при обработке. Этот же набор (модель, критерий, метод) необходим и для анализа алгоритма обработки, т. е. получения его характеристик.

Ряд предположений о событиях и соответствующих им наблюдениях, участвующих в модели и конкретизирующих ее, составляет *гипотезу*.

Модель M_i для i -й гипотезы связывает свойства события, сигнала s_i и наблюдения как функции от сигнала $y(s_i)$ и строится на основании *априорной* информации (от лат. «a priori», т. е. «до опыта», в данном случае до приема сигнала, тогда как «a posteriori» означает «после опыта», т. е. после получения наблюдений). Она включает математическое описание свойств событий, сигналов s , помех η , и вида взаимодействия $y = \varphi(s, \eta)$ сигналов и помех в канале.

Критерий оптимальности $K = (k_1, k_2, \dots)$ представляет собой набор показателей качества алгоритма обработки. В общем случае он включает помимо технических характеристик (вероятностей ошибок и дисперсий оценок) время обработки и показатели сложности технической реализации (например, число операций сложения-умножения), а также показатели стоимости. Синтез алгоритмов по групповому критерию [10] имеет специфику и здесь не рассматривается. Для построения *оптимального* (наилучшего) алгоритма обработки надо выбрать *критерий оптимальности*, определяющий для каждого алгоритма скалярные показатели качества (например, средний риск или дисперсию оценки). Эти показатели позволяют также *упорядочить* (для заданной модели) все другие рассматриваемые алгоритмы и оценить их близость к оптимальному решающему правилу.

Следует отметить, что в отличие от теории приема сигналов в прикладной статистике термин «критерий» употребляется иначе [11–13]. Под «критерием гипотезы» здесь понимается сама решающая процедура (ре-

шающее правило), позволяющая принять или отклонить гипотезу. Во избежание путаницы лучше употреблять для решающего правила термин «тест» (test), как это принято в зарубежных литературных источниках, где для критерия оптимальности используется термин «criterion». Далее термин «критерий» будет употребляться исключительно как «критерий оптимальности» для описания показателя качества решающего правила (алгоритма обработки).

Существует два вида критериев оптимальности: *условно-экстремальные* и *байесовские*. К условно-экстремальным относится критерий Неймана – Пирсона. Использование *байесовского* критерия оптимальности подразумевает случайный характер событий и существование априорных распределений вероятности.

Во многих практически важных случаях ставится задача построения не оптимальных, а близких к ним по характеристикам более простых (*квазиоптимальных*) алгоритмов обработки. В этих случаях формируется *решающая статистика* $u(y)$, которая может и не быть достаточной статистикой. Выбор критерия оптимальности алгоритма в значительной степени субъективен, поскольку «нельзя указать критерия для выбора критерия».

Метод $\Xi = (\Theta_1, \Theta_2, \dots)$ представляет собой набор процедур получения (синтеза) алгоритма обработки, а также процедур анализа характеристик алгоритма. Часто не существует метода получения оптимального алгоритма, особенно в условиях *априорной неопределенности*, и приходится применять известные решения для других условий. В этих ситуациях требуется анализ возможных проигрышей по сравнению с оптимальными алгоритмами, или хотя бы оценка потенциальных характеристик качества решения данной задачи.

1.3. Функция правдоподобия и отношение правдоподобия

Модель как элемент синтеза алгоритмов содержит в себе описание основных элементов задачи приема. Она разрабатывается на основе физических соображений под конкретную задачу приема.

В классической теории центральное место при описании модели занимают *функционалы вероятности*. Хорошо изучен прием *детерминированных* (полностью известных) и *квазидетерминированных* сигналов (с неизвестными параметрами) при аддитивном взаимодействии с *белым гауссовским шумом*. Модель белого гауссовского шума представляет идеализацию шумового процесса, имеющего в полосе приемника равномерную (одностороннюю по частоте) спектральную плотность мощности N_0 (В²/Гц). Обычно ее относят к области положительных частот и называют *односторонней*, в противном случае используется значение $N_0/2$ для двусторонней плотности. По умолчанию часто полагается активное сопротивление нагрузки в 1 Ом.

В случае приема детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного белого гауссовского шума условный (при гипотезе H_1) функционал вероятности имеет вид

$$f_1[y(t)] = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt\right\}.$$

Постоянная C есть бесконечно малая величина, что соответствует нулевой вероятности каждой конкретной реализации $y(t)$ на интервале $[0, T]$. При гипотезе H_0 функционал вероятности $f_0[y(t)]$ получается из $f_1[y(t)]$ подстановкой $s(t) = 0$. Функционалы вероятности позволяют получить *функцию правдоподобия* и *отношение правдоподобия*, которые определяют оптимальное (по любому критерию) преобразование наблюдений, так как они сохраняют всю доступную из наблюдений информацию о событиях и являются поэтому *достаточными* статистиками.

Предположим, что известен вид функционала вероятности для наблюдения $f_1[y(t)] = f[y(t) | s(t)]$, где зафиксирована форма полезного сигнала $s(t)$ (вертикальная черта отделяет условие). В нем аргументом является наблюдение $y(t)$, а $s(t)$ будет параметром (заданной функцией). Этот функционал представляет собой неслучайную функцию от каждой реализации $y(t)$, и при конечном числе возможных реализаций $y(t)$ он переходит в распределение вероятностей каждой из них.

Пусть теперь имеется конкретная принятая реализация наблюдения $y(t)$. Ее можно зафиксировать и рассматривать как параметр в функции $f_1[y(t)]$, а $s(t)$ – как аргумент этой функции. Введенная таким образом функция называется *функцией правдоподобия* $h[s(t) | y(t)]$ полезного сигнала $s(t)$ при данном наблюдении $y(t)$. Несмотря на то что функция правдоподобия $h[s(t) | y(t)]$ численно равна $f[y(t) | s(t)]$ при одинаковых $y(t)$ и $s(t)$, они являются функциями от разных аргументов и поэтому имеют совершенно разные вид и свойства.

Для иллюстрации рассмотрим случай однократного наблюдения случайной величины y с гауссовской плотностью вероятности

$$f(y | m) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{(y - m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где m – математическое ожидание (полезный параметр), σ^2 – дисперсия.

Плотность вероятности $f(y | m)$ является неслучайной функцией от y . Она зависит от значения полезного параметра m , как показано на рис. 1.3.1, а, для двух значений $m = 0$ и $m = m_1$. Если зафиксировать значение $y = y_1$, то функция правдоподобия $h(m | y_1) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{(y_1 - m)^2}{2\sigma^2}\right)$ будет

мерой правдоподобия различных значений m для данного наблюдения y_1 , и эта функция максимальна для наиболее правдоподобного значения параметра $m = m_1$. Таким образом, правдоподобие можно определить количественно, что позволят сравнивать различные значения оценок параметра для данного наблюдения.

Функция правдоподобия $h(m|y)$ будет различной для разных значений y , а поскольку наблюдение y есть случайная величина, то функция правдоподобия представляет собой случайную функцию, которая не может быть определена заранее. На самом деле функции $f(y|m)$ и $h(m|y)$ представляют собой разные сечения более общей функции $f(y,m)$ от двух аргументов, которая представлена в виде поверхности на рис. 1.3.1, б.

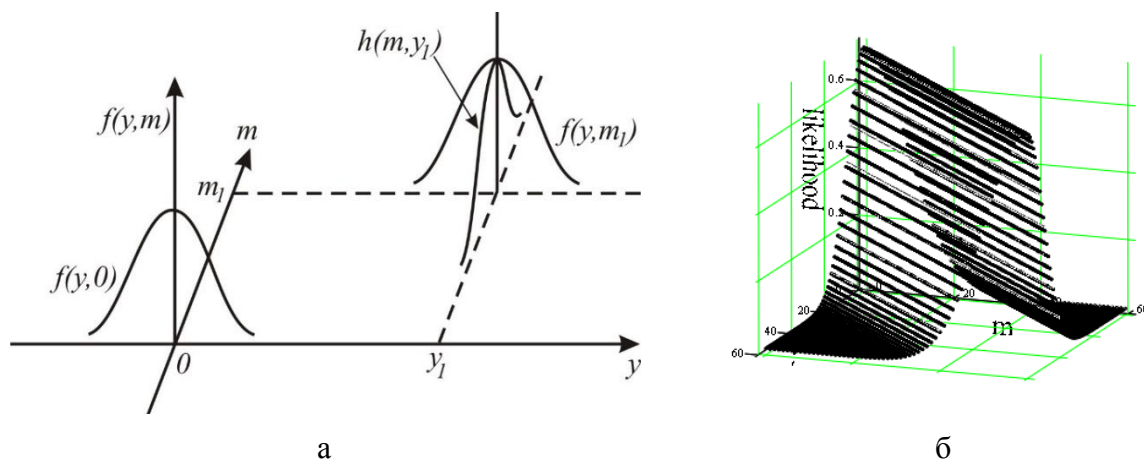


Рис. 1.3.1. Плотности вероятности $f(y|m)$, функции правдоподобия $h(m|y_1)$ и поверхность $f(y,m)$

В данном примере функция правдоподобия имеет такую же гауссовскую форму, как и плотность вероятности. Однако так бывает не всегда. Вид функция правдоподобия зависит от выбранного параметра. Пусть в качестве параметра выбрана величина $\gamma = 1/\sigma$. Тогда при $m = 0$ функция правдоподобия $h(\gamma|y) = \gamma(\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-y^2\gamma^2/2)$ имеет рэлеевскую форму, как показано на рис. 1.3.2, а. Здесь $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$, при этом дисперсия случайной величины y растет. Справа показана поверхность $f(y,\gamma)$ как функция от двух аргументов. Максимум функции правдоподобия $h(\gamma|y_1)$ при фиксированном $y = y_1$ указывает на наиболее правдоподобное значение параметра $\gamma = 1/\sigma$. Для другого параметра, связанного с дисперсией σ^2 , например для $\theta = 1/\sigma^2$, функция правдоподобия будет иметь другую форму. Таким образом, налицо сильное влияние способа параметризации плотности на вид функции правдоподобия для выбранного параметра.

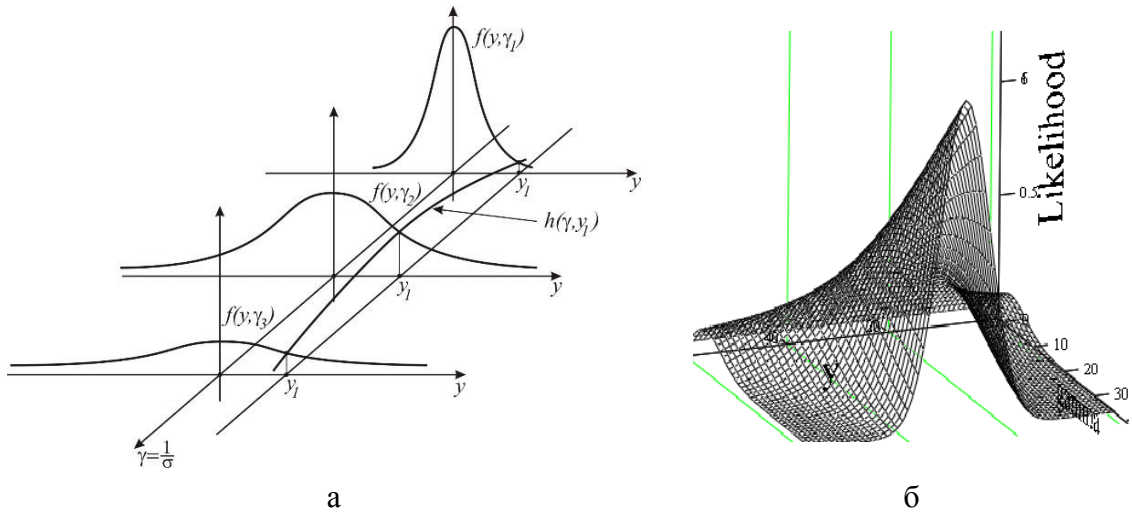


Рис. 1.3.2. Плотности вероятности $f(y|\gamma)$, функция правдоподобия $h(\gamma|y_1)$ и поверхность $f(y, \gamma)$

Линии контуров приведенных выше двух функций правдоподобия $f(y, m)$ (рис. 1.3.3, а) и $f(y, \gamma)$ (рис. 1.3.3, б) получаются при их сечении горизонтальными плоскостями. Штриховые линии указывают на наиболее правдоподобные значения параметров при заданном $y = y_1$.

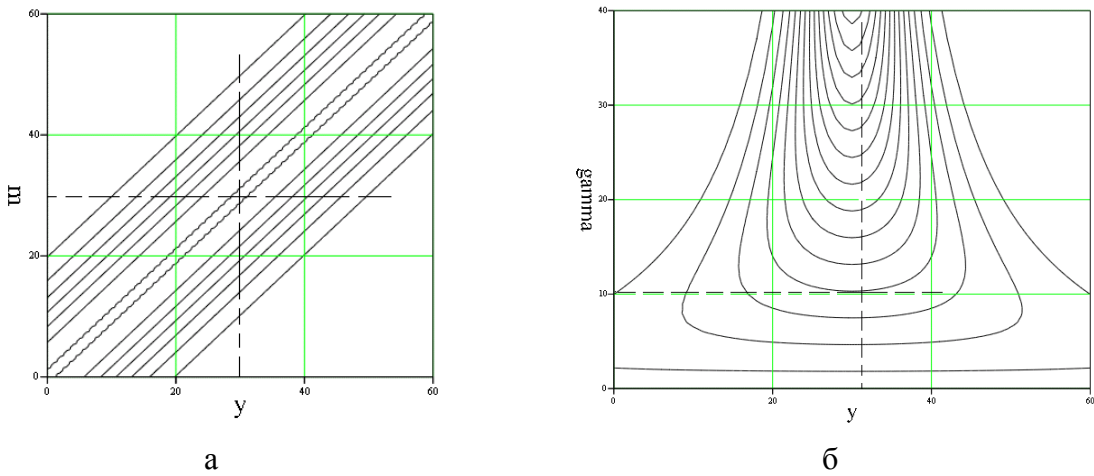


Рис. 1.3.3. Контур функции: а) $f(y, m)$; б) $f(y, \gamma)$

Еще один пример связан с приемом оптического излучения в режиме счета фотоэлектронов. Пусть световой поток попадает на фоточувствительную поверхность и вызывает появление на выходе в среднем m фотоэлектронов за время T . Случайное число k регистрируемых фотоэлектронов называется *фототсчетом*, а их математическое ожидание m – *средним фотоотсчетом*. Вероятность получить ровно k фотоэлектронов $P(k|m) = m^k \exp(-m) / k!$ подчиняется закону Пуассона (рис. 1.3.4). Это распределение является дискретным, так как случайная величина k принимает одно из целочисленных значений $k = 0, 1, 2, \dots$

Функция правдоподобия $h(m|k)$ при каждом фиксированном $k = k_1$ является непрерывной функцией полезного параметра m . Можно показать, что ее форма соответствует гамма-распределению. Таким образом, здесь распределение вероятностей и функция правдоподобия отличаются не только формой, но и по характеру: первая функция дискретная, а вторая непрерывная. Как и ранее, реализации $h(m|k)$ случайны и могут быть вычислены только после получения наблюдения.

Отношение правдоподобия определяется как отношение двух функций правдоподобия при разных аргументах. В задаче обнаружения $\Lambda(s, y) = h(s|y) / h(0|y)$. Часто это записывается в виде $\Lambda(s, y) = f_1(y) / f_0(y)$, где подразумевается лишь численное равенство, поскольку справа стоит отношение детерминированных функций.

Как и функция правдоподобия, отношение правдоподобия является скалярной случайной функцией от наблюдения y , принимающей неотрицательные значения. В первом примере отношение правдоподобия зависит от y , как показано на рис. 1.3.5 для $m=1$, где представлены и обе плотности $f_1(y)$ и $f_0(y)$. Для некоторого значения $y_{MP}(m)$, которое зависит от m , имеем равенство $f_1(y_{MP}) = f_0(y_{MP})$, тогда $\Lambda(m, y_{MP}) = 1$, и это значение может представлять собой порог различения между случаями $m=0$ и $m=1$ по поступившему наблюдению y .

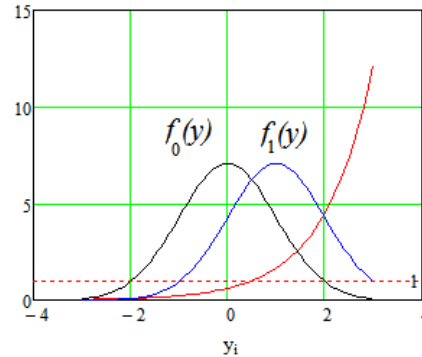
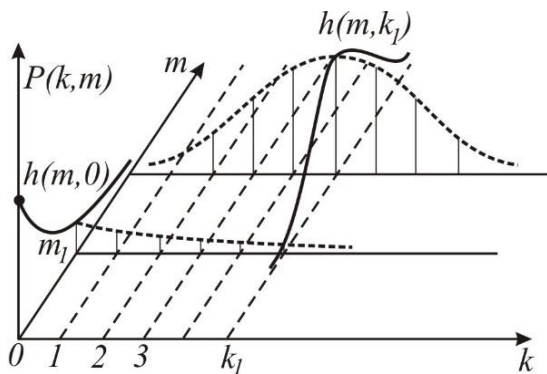


Рис. 1.3.4. Вероятности фотоотсчетов $P(k|m)$ и функция правдоподобия $h(m|k_1)$ для среднего числа фотоэлектронов m

Рис. 1.3.5. Плотности вероятности $f_1(y)$, $f_0(y)$ и отношение правдоподобия $\Lambda(s, y) = f_1(y) / f_0(y)$

Для детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного белого гауссовского шума нормировка устраняет бесконечно малую константу, и отношение правдоподобия определяется выражением

$$\Lambda[s(t), y(t)] = \exp(2z / N_0 - E_c / N_0),$$

где $z = \int_0^T y(t)s(t)dt$ – корреляционный интеграл, а $E_c = \int_0^T s^2(t)dt$ есть энергия сигнала.

Корреляционный интеграл (как и отношение правдоподобия) является скалярной случайной функцией от наблюдения, зависящей также от формы сигнала. Корреляционный интеграл является достаточной статистикой (ДС) для решения задачи обнаружения сигнала, поскольку только он включает наблюдения $y(t)$. В то же время он сохраняет всю информацию о сигнале, достаточную для его обнаружения по наблюдению $y(t)$.

Для дискретной выборки $\{y_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, имеем достаточную статистику $z = \sum_{k=1}^N y_k s_k$, а в случае комплексных процессов берется действительная часть $z = \text{Re}\{\dot{z}\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N y_k s_k^*\right\}$, где участвуют комплексные огибающие и комплексно сопряженный сигнал s_k^* [14]. Для квазидетерминированного сигнала со случайной начальной фазой φ корреляционный интеграл равен $z(\varphi) = Z \cos(\varphi - \arg \dot{z})$, и достаточной статистикой будет модуль корреляционного интеграла $Z = \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N y_k s_k^* \right|$.

1.4. Сигналы и помехи на выходе приемника

Для систем связи и локации, работающих в радиодиапазоне, широко используется модель *детерминированного* (полностью известного функционально) сигнала $s(t, \theta) = A(t, \tau_D) \cos[\omega_0 t + \Phi(t, \tau_D) + \varphi_0]$, где τ_D – временная задержка, связанная с распространением в пространстве, ω_0 – частота заполнения (несущая или промежуточная), $A(t, \tau_D)$ – амплитудная модуляция, $\Phi(t, \tau_D)$ – фазовая модуляция, включающая доплеровский набег фазы, φ_0 – начальная фаза. Набор параметров θ включает *полезные* (информативные) параметры, такие как временная задержка τ_D и частотный (доплеровский) сдвиг F_d , параметры модуляции, а также *мешающие* (неинформативные) параметры. Значения последних обычно связаны с искажениями в канале и неизвестны. Введя нормированную модуляцию $a(t, \tau_D)$ по формуле $A(t, \tau_D) = \varepsilon \cdot a(t, \tau_D)$, где ε – амплитудный множитель, а $\int_0^T |a(t, \tau_D)|^2 dt = 1$, можно рассматривать ε и φ_0 как мешающие параметры, часто к ним относится и несущая частота сигнала. Таким образом, в данном случае $\theta = \{\tau_D, F_d, \varepsilon, \varphi_0\}$.

В системах импульсной радиолокации реализуется случай *множественных* наблюдений, т. е. серии N входных сигналов $\{y_k(t)\}$, $k = 1, \dots, N$, принимаемых на N интервалах наблюдения (периодах повторения). Наблюдения могут содержать серию (пакет или пачку) полезных сигналов

$\{s_k(t)\}$ в смеси с помехой или только помеху. При *когерентности* этих сигналов (известной зависимости фазовых сдвигов) полный сигнал $s(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t)$ можно рассматривать целиком. Для полностью *некогерентных* сигналов фазовые соотношения между ними неизвестны, в этом случае естественно рассматривать только амплитудную модуляцию, или изменения огибающих. Обычно разделяют модели внутрипериодных и межпериодных изменений (флуктуаций) параметров элементарных сигналов.

В системах связи часто формируются N элементарных сигналов из конечного набора, содержащего сигналы $\{s_m(t)\}$, $m=1, \dots, M$. При этом $s(t, \theta) = \sum_{k=1}^N a_k s_m(t - \tau_k) \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$, где совокупности параметров $a = (a_1, \dots, a_N)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ описывают состояние канала связи: амплитудные и фазовые флуктуации, а также многолучевость распространения.

Сигнал называют *квазидетерминированным*, если его форма известна, но неизвестны какие-либо параметры: начальная фаза, амплитудный множитель, частота и др. Эти параметры могут полагаться детерминированными или случайными величинами. В последнем случае для полного описания требуется задание совместной плотности распределения параметров.

Если нет достоверной информации о форме полезного сигнала (что часто бывает в гидроакустических локаторах и при пассивной локации), то применяются также модели *случайных* сигналов, когда $s(t, \theta)$ представляет собой одну из возможных реализаций случайного процесса. В этом случае для описания сигнала используются корреляционные функции и стохастические уравнения, включающие полезные и мешающие параметры.

Помехи на выходе линейной части приемника принято разделять на *аддитивные* и *неаддитивные* (куда входят мультипликативные помехи, т. е. перемножающиеся с полезным сигналом, в частности амплитудные флуктуации). Аддитивные помехи суммируются с полезным сигналом и отличаются тем, что их свойства не зависят от вида и параметров полезного сигнала. Помимо белого гауссовского шума аддитивная помеха может содержать регулярную или хаотическую импульсную последовательность.

В последнее время интенсивно развивается теория приема в условиях *сигнально-зависимых* помех. Это помехи, свойства которых существенно меняются при появлении полезного сигнала и изменениях его характеристик. Сигнально-зависимые помехи связаны также с многолучевым распространением сигналов (имея в виду спектральные свойства, их называют *сосредоточенными*). Сигнально-зависимыми являются мультипликативные помехи, которые входят в модель как амплитудные множители. В оптических системах при фотоприеме возникают помехи типа *дробовых* шумов, которые также оказываются сигнально-зависимыми.

Пусть дискретные наблюдения подчиняются закону Пуассона, т. е. вероятность $P(y = k) = m^k \exp(-m) / k!$, где параметр m есть математическое ожидание (средний отсчет за время наблюдения), совпадающее с дисперсией и другими высшими кумулянтами распределения. Значение k представляет собой результат накопления случайного числа событий из однородного потока редких событий, например потока импульсов, превышающих высокий порог, или потока фотоэлектронов при фотодетектировании. При появлении полезного сигнала изменяется не только математическое ожидание m , но и дисперсия, т. е. мощность дробового шума пропорциональна полезному сигналу. Меняются также и остальные кумулянты распределения Пуассона. Все это и определяет в данном случае зависимость характеристик помехи от полезного сигнала.

Практический интерес представляют наблюдения, получаемые после преобразований в типовом приемном тракте. Типовая структура представляет собой цепочку «фильтр – детектор – фильтр», где линейные фильтры отличаются полосой пропускания (обычно первый более широкополосный), а детектор может быть синхронным (фазовым) или несинхронным (амплитудным, частотным). В случае синхронного детектирования обработка является *когерентной*, учитывающей фазовые соотношения. Для систем локализации и навигации, использующих периодические импульсные сигналы, обработка разделяется на *внутрипериодную* (ее производит первый фильтр и детектор в течение периода повторения) и *межпериодную* (накопление во втором фильтре). При синхронном детектировании накопление будет когерентным, а в случае амплитудного детектирования – некогерентным. Когерентная обработка обычно реализуется двумя квадратурными каналами.

В случае *нефлуктуирующей* пачки (пакета) когерентных импульсов, принимаемых на фоне аддитивного белого шума, отношение правдоподобия имеет вид

$$\Lambda(a, \varphi; y) = \exp(-E_c / N_0) \cdot I_0(2aZ / N_0),$$

где $y = (y_1, \dots, y_N)$, y_k – комплексная огибающая наблюдения в k -м периоде повторения; $Z = \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N y_k \exp(jk\varphi_k) \right|$ – модуль корреляционного интеграла; a – амплитудный множитель; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, φ_k – сдвиг фазы за k -й период повторения импульсов; $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $E_c = \sum_{k=1}^N E_k$ – энергия пачки.

Для некогерентной пачки импульсов [14]

$$\ln \Lambda(a; Z) = -E_c / N_0 + \sum_{k=1}^N \ln I_0(2a_k Z_k / N_0),$$

где величины Z_k могут быть получены как отсчеты модуля комплексной огибающей на выходе фильтра, согласованного с одиночным импульсом. В первом приближении при больших отношениях сигнал/шум логарифм функции Бесселя можно заменить линейной функцией.

Для независимо флуктуирующих амплитуд импульсов (с точностью до константы c)

$$\ln \Lambda(Z) = c + \sum_{k=1}^N \frac{Z_k^2}{N_0^2 (1 + q_k^2)},$$

где q_k^2 есть отношение сигнал/шум по мощности для k -го импульса.

Отсюда следует, что достаточной статистикой для независимых флуктуаций будет сумма значений на выходе квадратичного детектора $\xi_2 = \sum_{k=1}^N Z_k^2$, тогда как для нефлуктуирующей пачки (а также в случае дружных флуктуаций) детектор должен быть линейным $\xi_1 = \sum_{k=1}^N Z_k$.

Модели наблюдений на выходах детектора и накопителя разработаны лишь для некоторых классических случаев приема. Важное практическое значение имеет распределение на выходе детектора (фазового или амплитудного). Рассмотрим амплитудное детектирование радиоимпульса на фоне аддитивного гауссовского шума. Распределение огибающей V на выходе линейного детектора описывается законом Райса

$$f_1(V) = (V/\sigma^2) \exp(-(V^2 + A^2)/2\sigma^2) \cdot I_0(VA/\sigma^2)$$

и при отсутствии полезного сигнала переходит в распределение Рэлея

$$f_0(V) = (V/\sigma^2) \exp(-V^2/2\sigma^2).$$

Здесь $\sigma^2 = N_0 \Delta f$ – дисперсия (мощность) шума на входе приемника, Δf – полоса приемника (Гц).

В случае квадратичного детектора для $x = V^2/2\sigma^2$ имеем

$$f_1(x) = \exp(-(x + q^2)) I_0(2q\sqrt{x}), \quad f_0(x) = \exp(-x),$$

где $q^2 = A^2/2\sigma^2$ – отношение сигнал/шум по мощности на входе приемника.

Учет случайной амплитуды импульса изменяет вид плотностей $f_1(\cdot)$. Если амплитуда имеет распределение Рэлея

$$f(A) = (A/\sigma_A^2) \exp(-A^2/2\sigma_A^2)$$

с параметром σ_A^2 , то

$$f_1(V) = (V/(\sigma^2 + \sigma_A^2)) \exp(-V^2/2(\sigma^2 + \sigma_A^2)).$$

Среднее значение квадрата амплитуды равно $\overline{A^2} = 2\sigma_A^2$, поэтому можно ввести среднее отношение сигнал/шум по мощности $\overline{q^2} = \overline{A^2} / 2\sigma^2 = \sigma_A^2 / \sigma^2$. Теперь

$$f_1(x) = \left(1 / (1 + \overline{q^2})\right) \exp\left(-x / (1 + \overline{q^2})\right).$$

Практически важным является случай последетекторного (некогерентного) накопления пачки из N импульсов. Рассмотрим случай квадратичного детектора $z = \sum_{k=1}^N x_k = (1 / 2\sigma^2) \sum_{k=1}^N V_k^2$. При отсутствии сигнала результат накопления имеет гамма-распределение

$$f_0(z) = z^{N-1} \exp(-z) / (N-1)!$$

При появлении нефлуктуирующего сигнала

$$f_1(z) = \left(z / q_N^2\right)^{(N-1)/2} \exp(-z - q^2) I_{N-1}(2q_N \sqrt{z}),$$

где $q_N^2 = Nq^2$ – суммарное отношение сигнал/шум по мощности на выходе, $I_{N-1}(\cdot)$ – функция Бесселя порядка $N-1$. Для случая быстрых (независимых) флуктуаций амплитуд импульсов плотность вероятности

$$f_1(z) = z^{N-1} \exp(-z / (1 + \overline{q^2})) / \left[(1 + \overline{q^2})^N (N-1)! \right]$$

и сохраняется форма гамма-распределения, но параметр масштаба увеличивается в $1 + \overline{q^2}$ раз, где $\overline{q^2}$ есть среднее отношение сигнал/шум в импульсе.

Пассивные помехи, связанные с отражением от земной или морской поверхности, гидрометеоров, реверберация в гидроакустических системах и т. п., имеют разнообразные распределения вероятностей. Для описания характеристик процессов на выходе некогерентного накопителя в этих случаях имеют экспериментальное обоснование гамма-распределение, распределение Вейбулла и логарифмическое нормальное распределение:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z^{\alpha-1} \exp(-z / \beta) / (\beta^\alpha \Gamma(\alpha)), \\ f_0(z) &= (\gamma / \beta) (z / \beta)^{\gamma-1} \exp(-(z / \beta)^\gamma), \\ f_0(z) &= (\sigma_l z \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(- (1 / 2\sigma_l^2) [\ln(z / z_{\text{med}})]^2\right), \end{aligned}$$

где β – параметр масштаба; α , γ , σ_l – параметры формы; z_{med} – медиана распределения.

1.5. Оптимальное обнаружение и различение сигналов

Задача обнаружения или различения сигналов формулируется обычно как проверка статистических гипотез H_i при $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$. Число гипотез M считается известным. Решение d_i в пользу гипотезы H_i принимается в результате обработки наблюдения. Мешающие факторы, включающие помехи, вызывают ошибки, т. е. принятие неправильных решений.

Обработку можно рассматривать как разделение всего множества реализаций наблюдений Y на непересекающиеся подмножества Y_i соответствующие гипотезам. Алгоритм обработки описывается решающей функцией $\delta(y)$, которая и представляет собой конкретную совокупность преобразований наблюдений y в решение $d = \delta(y)$. Функция $\delta(y)$ носит также название *решающей процедуры* или *решающего правила*. Для задачи различения вводится [1] решающая вектор-функция $\delta(y) = (\delta_0(y), \delta_1(y), \dots, \delta_{M-1}(y))^T$, где T – знак транспонирования.

Если правильное решение $d_i = i$, т. е. определяется индекс события, то $\delta_i(y)$ есть *индикаторная* функция соответствующей области Y_i , т. е. индикаторная функция соответствующего решения. Для любой выборки $\sum_{i=0}^{M-1} \delta_i(y) = 1$, поэтому размерность пространства решений на единицу меньше, чем размерность M задачи различения. В задаче обнаружения решающая функция есть индикатор множества Y_1 :

$$\delta(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_1, \\ 0, & y \in Y_0, \end{cases}$$

таким образом, все множество наблюдений Y разделяется на два подмножества единственной границей. В задаче обнаружения область Y_0 принятия гипотезы H_0 называется *допустимой*, а область Y_1 отклонения гипотезы H_0 (т. е. принятия H_1) называется *критической* областью. Таким образом, алгоритм обнаружения характеризуется *критической функцией* $\delta(y)$, которая (при отсутствии рандомизации алгоритма) принимает значение 0 в допустимой области и значение 1 в критической области, т. е. является *индикатором критической области*.

В случае *рандомизированного* (от англ. random – случайный) алгоритма обнаружения функция $\delta(y)$ принимает любое значение от нуля до единицы и представляет собой вероятность принятия гипотезы H_1 . Рандомизированное правило включает случайный механизм или эксперимент с двумя исходами, вероятности которых $\delta(y)$ и $1 - \delta(y)$ зависят от наблюдений.

Разные алгоритмы обработки приводят к разным границам подмножеств. Указанные подмножества можно рассматривать как *классы*, поэтому

задача различения представляет собой частный случай более общей задачи *классификации*, которая включает дополнительный этап формирования *признаков* из первичных наблюдений.

Для реализации разделения многомерного множества Y обычно формируется *решающая статистика* меньшей мерности, чем исходные наблюдения. Слово «статистика» означает функцию от наблюдений, т. е. результат преобразования наблюдений. Исходные наблюдения сами также являются статистикой. *Достаточная* статистика включает всю информацию о задаче, которая содержится в исходной выборке.

При *обнаружении* множество наблюдений *редуцируется* (сводится, отображается) на одномерное пространство (числовую ось). Таким образом, *решающая статистика* производит *упорядочение* реализаций наблюдений. В случае M гипотез пространство решений имеет не более чем $M - 1$ измерений [5].

При *полном статистическом описании* модели для каждой из гипотез можно указать *функцию распределения вероятностей* наблюдения $F_i(y)$ или *плотность вероятности* $f_i(y)$ при $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$. Здесь y – неслучайный аргумент. Плотность вероятности имеет размерность, обратную размерности величины y . Для наблюдений, описываемых непрерывными во времени случайными процессами, используются соответствующие *функционалы* вероятностей (скалярные функции от реализации).

Гипотезы могут предполагать *неслучайный* или *случайный* характер событий. В последнем случае вводятся априорные вероятности p_i для каждого из событий или для каждой из гипотез, что соответствует *байесовскому подходу* к задаче. Случайный характер событий изменяет вид распределения наблюдений, т. е. меняет модель задачи.

Оптимальный по любому разумному критерию оптимальности обнаружитель формирует *отношение правдоподобия* $\Lambda(y)$ и сравнивает это отношение с порогом Λ_T , значение которого определяется выбранным критерием. Таким образом, оптимальный (нерандомизированный) алгоритм имеет вид $\delta(y) = (1/2)\{\text{sgn}(\Lambda(y) - \Lambda_T) + 1\}$. Здесь

$$\text{sgn}(y) = \frac{y}{|y|} = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

есть знаковая функция. Иначе говоря, при выполнении неравенства $\Lambda(y) \geq \Lambda_T$ принимается решение d_1 , а при невыполнении – решение d_0 . Часто используется строгое неравенство $\Lambda(y) > \Lambda_T$, поскольку вероятность события $\Lambda(y) = \Lambda_T$ при непрерывных значениях равна нулю.

Отношение правдоподобия есть положительная случайная скалярная величина. Оно является *минимальной достаточной статистикой*, как и любое его монотонное преобразование. Такая статистика осуществляет

максимально возможную редукцию данных без потери информации. Часто удобнее формировать логарифм отношения правдоподобия $\ln \Lambda(y)$. В задаче различения формируется несколько отношений правдоподобия, которые сравниваются с разными порогами.

В задаче обнаружения показателями качества являются четыре условных вероятности решений (два из которых ошибочные решения и два – правильные).

Вероятность ложной тревоги $F = P(d_1 | s_0)$ является вероятностью *ошибки первого рода*. Вертикальная черта в выражении означает, что справа от нее стоит условие. Эта величина называется еще *размером критической области*. Обычно выбирается достаточно малое число $0 < \alpha < 1$ (называемое *уровнем значимости*) и выдвигается требование $F \leq \alpha$. *Вероятность пропуска* является вероятностью *ошибки второго рода*.

Вероятность правильного обнаружения $D = P(d_1 | s_1)$ называется *мощностью* критической области или *мощностью решающего правила*. Ясно, что вероятность пропуска равна $1 - D$. Наконец, *вероятность правильного необнаружения* равна $P(d_0 | s_0) = 1 - F$. Поскольку вероятности при одинаковых условиях в сумме составляют единицу, достаточными для характеристики качества являются два показателя, обычно D и F , либо вероятности ошибок F и $1 - D$. Критерий оптимальности позволяет сформировать из них один скалярный показатель.

При использовании критерия Неймана – Пирсона наилучший или *оптимальный* алгоритм обнаружения (или *наилучшая критическая область* – НКО) имеет *наибольшую мощность* (вероятность правильного обнаружения D) при заданном *размере* критической области (т. е. при заданной вероятности ложной тревоги F).

Для многоальтернативной задачи имеется M вероятностей *правильного различения* $D_i = P(d_i | s_i)$. Вероятность ошибочного различения (отнесение к другому классу) i -го сигнала является вероятностью [7] *ошибки первого рода*

$$\alpha_i = 1 - D_i = \sum_{k \neq i} P(d_k | s_i).$$

В этом случае фиксируется i -е событие s_i . Вероятность D_i характеризует ожидаемую частоту правильных решений в ряду экспериментов, в каждом из которых происходит событие (появляется сигнал) s_i .

Вероятность ошибочного принятия k -го решения d_k есть вероятность *ошибки второго рода* $\beta_k = \sum_{i \neq k} P(d_k | s_i)$. В этом случае событие s_k исключается из рассмотрения. Заметим, что в отличие от ошибок первого рода сумма вероятностей $\beta_k + D_k$ не равна единице, а представляет безусловную вероятность $P(d_k)$ принятия решения d_k . Это следует из того, что $\sum_k P(d_k) = 1$.

Величина $1 - \beta_k$ не характеризует достоверность какого-либо правильного решения, а определяет вероятность отказа от решения d_k в пользу любого другого решения в ряду экспериментов, в которых с равной вероятностью происходят события s_i , $i \neq k$. Для двухальтернативного случая аналога такой вероятности нет.

Оптимальное *байесовское* правило различения минимизирует *средний риск*, величина которого зависит от элементов матрицы потерь и априорных вероятностей каждой из гипотез [1–3].

Качество решающего правила дополнительно характеризуется свойствами *несмещенности* и *состоятельности*. Для несмещенного правила вероятность отвергнуть ложную гипотезу должна быть не меньше вероятности отвергнуть правильную, т. е. вероятность правильного обнаружения должна быть не меньше вероятности ложной тревоги. Состоятельным алгоритмом называется такой, при использовании которого вероятности ошибок стремятся к нулю, когда размер выборки неограниченно возрастает.

Во многих задачах приема можно успешно использовать стандартные методы и процедуры обработки данных и принятия решений, неплохо работающие в различных практических ситуациях. В прикладной статистике выделяют следующие основные типы решающих правил или тестов [11]. Это тесты:

- *значимости* (проверка заданных значений параметров распределений);
- *согласия* (с выбранной моделью);
- *однородности* двух или нескольких выборок (проверка принадлежности их единой генеральной совокупности), либо *стационарности* ряда наблюдений;
- *симметрии* распределений;
- *адекватности* (модели) или проверка типа зависимости между компонентами (многомерного признака);
- *независимости* (*коррелированности*) и др.

При решении задач приема алгоритм может обрабатывать заранее заданный массив входных данных, получаемых за фиксированный интервал времени. Правило может использовать единственную анализируемую выборку. В этом случае оно называется *одновыборочным*.

Двухвыборочные алгоритмы используют сравнительный анализ выборок, одна из которых может являться *опорной* или *классифицированной*. В частности, опорная выборка может быть чисто помеховой. Можно рассматривать и *многовыборочные* правила решения.

В зависимости от постановки задачи алгоритм обнаружения может быть не *одношаговым*, а *последовательным* или *многошаговым*. Такая (неклассическая) схема принятия решения использует случайный объем выборки. Для *последовательного* алгоритма длительность интервала наблюдения заранее не фиксируется, а в основную обработку включается *правило*

остановки (которое принимает дополнительное решение), прекращающее процесс наблюдения. Например, в *схеме обратного выбора* момент остановки определяется по накоплению заданного числа событий (появлению заданного числа импульсов). В число характеристик последовательных алгоритмов помимо традиционных вероятностей ошибок входят характеристики *случайного момента остановки*, например его математическое ожидание и дисперсия.

В среднем число наблюдений последовательного алгоритма оказывается меньшим по сравнению с любым непоследовательным при одинаковых характеристиках обнаружения или различения. Однако обычно вероятны отдельные реализации процесса принятия решения с очень большим временем наблюдения.

Если существует ненулевая вероятность того, что наблюдение может продолжаться неограниченно, то схема называется *открытой*. Когда процедура останавливается с вероятностью единица, схема будет *замкнутой*. Часто производится принудительное ограничение времени наблюдения, т. е. «усечение» процедуры ценою некоторой потери качества.

В ряде задач обнаружения и различения предусмотрена смена событий в процессе приема и регистрации наблюдений. Простейший вариант представляет «задача о разладке», когда свойства наблюдений скачком изменяются в неизвестный момент времени. Обычно одновременно с обнаружением факта «разладки», т. е. смены гипотезы, стоит задача оценивания момента «разладки». При этом возможны как классическая, так и последовательная схемы принятия решения. Качество обнаружения «разладки» обычно можно повысить ценою существенного запаздывания принятого решения о наличии «разладки» относительно момента ее возникновения.

Существуют *многоэтапные* решающие правила, использующие промежуточные решения для формирования окончательного решения. В случае *многошаговой* задачи получение наблюдений и принятие решений идет по шагам. На каждом шаге имеется *параметр состояния* x_n *информационной* (радиотехнической) системы. Этот параметр определяет, например, положение диаграммы направленности, стробов дальности, величины порогов и др.

Состояние системы изменяется в результате принятия решений на этапе обработки наблюдений. Решение d_n , полученное на n -м шаге, может зависеть и от ранее принятых решений d_{n-1} , d_{n-2} , ... Кроме того, уже принятые решения могут повлиять на параметры состояния x_{n+1} , x_{n+2} , ... и наблюдения y_{n+1} , y_{n+2} , ... на последующих шагах, а через них и на все последующие решения. Такие многошаговые схемы принятия решений называются *управляемыми* [7], а сама система становится замкнутой.

1.6. Параметры обнаружения и отношение сигнал/шум

Степень различия распределений $f_i(y)$ и $f_j(y)$ обычно характеризуется некоторой мерой различимости или параметром «расстояния». В задаче обнаружения эта величина используется для построения характеристик обнаружения и называется *параметром обнаружения* [1–5]. Параметр обнаружения позволяет упорядочить модельные сигнально-помеховые ситуации для выбранного алгоритма.

Если рассматриваются свойства некоторой решающей статистики u , то чаще всего вводится *дефлексия* $d = (m_1 - m_0) / \sigma_0$, где $m_i = M_i(u)$ – математическое ожидание решающей статистики при гипотезе H_i , а σ_0 – ее стандартное (среднеквадратическое) отклонение при гипотезе H_0 . Квадрат дефлексии иногда называют *обобщенным отношением сигнал/шум* [16] или *коэффициентом девиации* [17]. В случае когда появление сигнала вызывает сдвиг распределения решающей статистики, дефлексия представляет собой *отношение сигнал/шум по напряжению* на входе решающего устройства (т. е. на выходе системы обработки). Следует отметить, что дефлексия определяется *только для решающей статистики* (которая сравнивается с порогами), тогда как отношение сигнал/шум может рассматриваться (и вводиться различным образом) в разных точках тракта обработки.

В других случаях более удобным параметром обнаружения оказывается *отношение сигнал/шум по мощности*, определяемое как относительное изменение второго момента распределения решающей статистики: $q^2 = (P_1 - P_0) / P_0$. Здесь $P_i = M_i\{u^2\}$ – второй момент распределения $f_i(u)$ при гипотезе H_i .

В [18] используется параметр обнаружения, названный *степенью обнаружимости* $\rho = (m_1 - m_0) / (\sigma_1 \sigma_0)^{1/2}$, где в знаменателе стоит среднее геометрическое стандартных отклонений при гипотезах H_1 и H_0 . Если $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1 + \gamma)$, где $\gamma > -1$, то $\rho = d / (1 + \gamma)^{1/4}$.

Другая мера расхождения распределений также связана с моментами первого и второго порядков и представляет собой *расстояние Фишера* [8]:

$$f = (m_1 - m_0)^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_0^2) = d^2 / (2 + \gamma).$$

Для двух случайных векторов $y_1 \sim N(m_1, R)$ и $y_2 \sim N(m_2, R)$ из гауссовских многомерных распределений с общей ковариационной матрицей R вводится расстояние Махаланобиса $d = \Delta m^T R^{-1} \Delta m$, которое сохраняется при ортонормированных преобразованиях этих векторов [8].

В качестве параметра обнаружения подходят также интегральные меры различия распределений, например $\Delta^2 = \int [F_1(y) - F_0(y)]^2 dy$. В работе [19]

Э. Питмен рассматривает две меры различимости двух плотностей: $\rho^* = \int |f_1 - f_0| dy$ и $\rho^2 = \int (\sqrt{f_1} - \sqrt{f_0})^2 dy$, причем предпочтение отдается второй. Фактически эта мера связана с расстоянием Баттачари $B = -\ln \int \sqrt{f_1(y)f_0(y)} dy$ [5]. Можно также выбрать меру *омега-квадрат* [20, 22]: $\omega^2 = \int (F_1(y) - F_0(y))^2 f_0(y) dy$, где вместо плотностей фигурируют функции распределения.

Полезной величиной является расстояние Чернова [5]:

$$C(s) = \int f_1^s(y) f_0^{1-s}(y) dy = \int [f_1(y) / f_0(y)]^s f_0(y) dy,$$

которое является обобщением расстояния Баттачари [5], поскольку параметр s необходимо выбрать в процессе оптимизации. При $s=1/2$ имеем как раз расстояние Баттачари $B = -\ln C(1/2)$. Эти меры требуют для своего вычисления знания вида плотностей.

Неоднозначность определения параметра обнаружения в разных задачах приводит к трудностям сравнения различных алгоритмов по их характеристикам обнаружения (зависимости вероятности правильного обнаружения от параметра обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги), построенным для разных параметров обнаружения. В этом смысле рабочие характеристики приемника (РХП – связь между вероятностями правильного обнаружения и ложной тревоги при заданной сигнально-помеховой ситуации) являются более универсальными и могут обеспечить требуемое сравнение (разд. 1.7).

Важной системной характеристикой является *пороговое* значение выбранного параметра обнаружения (пороговая дефлексия, пороговое отношение сигнал/шум по мощности и др.). Пороговое значение гарантирует в данных условиях требуемую вероятность правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги.

Если размер выборки не является строго фиксированным, то обнаружители можно сравнивать по их эффективности для одной и той же сигнально-помеховой обстановки (модельной ситуации). Пусть имеются два обнаружителя δ_1 и δ_2 , решающие одну и ту же задачу обнаружения с одинаковыми вероятностями ошибок. Для этого правилу δ_1 требуется N_1 выборок, а правилу δ_2 требуется N_2 выборок. Более эффективным считается тот обнаружитель, которому требуется меньший объем выборок.

Относительная эффективность (Relative Efficiency – RE) правила δ_1 по отношению к δ_2 определяется как отношение N_2 к N_1 $RE(\delta_1 | \delta_2) = N_2 / N_1$. Если в качестве опорного правила δ_2 берется оптимальный обнаружитель в условиях полной априорной информации, то для других обнаружителей $RE \leq 1$.

Трудности исследования алгоритмов при конечных размерах выборок заставляют обращаться к *асимптотическим* методам и к асимптотическим критериям качества – *асимптотической эффективности* и *асимптотической оптимальности*. Эти понятия связываются со случаем неограниченного возрастания объема выборки N (времени наблюдения).

Асимптотически оптимальный алгоритм обеспечивает наибольшую асимптотическую эффективность среди рассматриваемых алгоритмов. Может случиться, что будет множество асимптотически оптимальных алгоритмов для решаемой задачи (с одинаковыми предельными характеристиками). Однако обычно эти алгоритмы отличаются скоростью сходимости характеристик к предельным характеристикам. При этом, однако, амплитуда сигнала должна стремиться к нулю обратно пропорционально \sqrt{N} . Если u_N обозначает решающую статистику для выборки объема N , а $d(u_N)$ – дефлексия этой статистики, то *асимптотическую эффективность* можно определить как асимптотическую дефлекцию $d_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} [d(u_N)/\sqrt{N}]$. Обычно [2] рассматривается последовательность алгоритмов $\{\delta_N\}$ для последовательности сигналов с убывающими амплитудами $A_N = a/\sqrt{N}$.

Асимптотическая относительная эффективность (ARE – Asymptotic Relative Efficiency) определяется как предельная величина относительной эффективности

$$ARE(\delta_1 | \delta_2) = \lim_{N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty} N_2/N_1.$$

Асимптотическую эффективность алгоритма можно также определить через асимптотическую дефлекцию решающей статистики. Для двух решающих статистик *асимптотическая относительная эффективность* может определяться как отношение асимптотических дефлекций.

Другой подход к синтезу алгоритмов связан с *локальной оптимальностью*. Асимптотические свойства логарифма отношения правдоподобия для детерминированного сигнала при независимой выборке определяются главным образом линейным членом разложения, т. е. $\ln \Lambda(s, y) \approx a\zeta(y)$, где a есть достаточно малое изменение, связанное с появлением полезного сигнала, а $\zeta(y) = [\partial \ln \Lambda(s, y)/\partial a]_{a=0}$ называется *эффективным вкладом* для y и представляет *локально оптимальную* решающую статистику. Можно показать, что она обеспечивает наибольший угол наклона касательной к функции мощности (вероятности правильного обнаружения) $D(a)$, т. е. наибольший начальный наклон характеристики обнаружения. *Асимптотически достаточной* статистикой в этом случае будет

$$u(y) = (1/\sqrt{N}) \sum_{k=1}^N s_k \zeta(y_k).$$

Отметим, что отношение сигнал/шум может вводиться и вычисляться в любой точке тракта обработки. Его увеличение часто рассматривается как важный показатель качества функционирования того или иного устройства. Существуют различные методы его введения (например, дефлекция или относительное приращение мощности, которые определяются исключительно удобством дальнейшего использования как параметра, упорядочивающего сигнално-помеховые ситуации.

Задания

1. Рассчитать расстояние Баттачари для двух одномерных гауссовских распределений. Сравнить с расстоянием Махаланобиса.
2. Вычислить расстояние Баттачари для двух логнормальных распределений. Сравнить с расстоянием Махаланобиса для порождающих нормальных распределений.
3. Рассчитать расстояние Баттачари для двух экспоненциальных распределений. Сравнить результаты с расстоянием для двух гауссовских распределений с теми же математическими ожиданиями и дисперсиями.

1.7. Рабочие характеристики приемника и характеристики обнаружения

Качество алгоритма обнаружения в конкретных условиях (для заданной модели) полностью характеризуется двумя вероятностями: правильного обнаружения D и ложной тревоги F . Значения $F = F_1$ и $D = D_1$ определяют *рабочую точку* некоторого алгоритма в декартовых координатах (рис. 1.7.1). Разные точки могут соответствовать разным алгоритмам при одинаковых условиях либо одному алгоритму при изменении модели.

При отсутствии полезного сигнала рабочая характеристика любого алгоритма обнаружения лежит на главной диагонали, где $D = F$. Если и при появлении полезного сигнала алгоритм имеет равные вероятности правильного и ошибочного решений (т. е. располагает рабочие точки на главной диагонали), то фактически он не получает информации из наблюдений, и его возможно построить без привлечения этих наблюдений (например, решения могут приниматься по результатам бросания монеты, по звездам и т. п.). Ясно, что такие алгоритмы не представляют практического интереса.

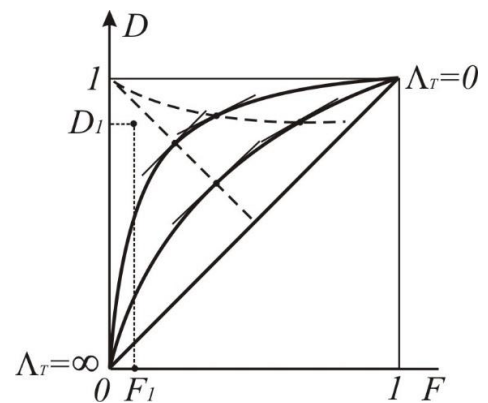


Рис. 1.7.1. Рабочие характеристики приемника. Линии байесовского изокритерия

Алгоритмы, рабочие точки которых попадают в область под главной диагональю, где $D < F$, называются *смещенными*, поскольку вероятность ошибки оказывается больше, чем вероятность правильного решения. Рабочие точки таких алгоритмов оказываются *ниже главной диагонали*. Рабочие точки *несмещенных* алгоритмов располагаются при любых условиях *выше главной диагонали*.

Если известно, что алгоритм является смещенным при всех возможных условиях работы, то он может быть преобразован в эквивалентный несмещенный (достаточно изменять решения на противоположные).

Однако бывает, что смещение возникает лишь при определенных условиях, является неизвестным и не может быть установлено заранее. Обычно смещенные алгоритмы исключаются из рассмотрения, и естественным требованием при синтезе является *несмещенность* алгоритма обнаружения. Это в некоторой степени ограничивает класс допустимых алгоритмов, поскольку иногда смещенный алгоритм может работать лучше, чем несмещенный.

Рассмотрим класс алгоритмов, основанных на сравнении с порогом отношения правдоподобия: решение в пользу гипотезы H_1 принимается при $\Lambda(s, y) \geq \Lambda_T$, где пороговое значение Λ_T может принимать любое значение от нуля до бесконечности. Формирование статистики $\Lambda(s, y)$ включает определенные преобразования наблюдений y , составляющие данный алгоритм обработки. Такая статистика называется *собственной* статистикой для данной модели сигналов и помех [5].

Если порог Λ_T равен нулю, то независимо от модели алгоритм будет давать $D = F = 1$. С другой стороны, при бесконечно большом пороге Λ_T обе вероятности D и F равны нулю. Изменение порога от нуля до бесконечности вызывает для заданной модели движение рабочей точки от $(0, 0)$ к $(1, 1)$ по линии, называемой *рабочей характеристикой приемника* (рис. 1.7.1), сокращенно РХП (англ. ROC – Receiver Operating Characteristic). Точнее было бы назвать ее рабочей характеристикой *обнаружителя* (или алгоритма обнаружения). При изменении модели (характеристик помехи или полезного сигнала) получается другая рабочая характеристика этого же алгоритма.

Семейство рабочих характеристик, полученное для данного алгоритма обнаружения в различных условиях, достаточно полно характеризует этот алгоритм. Сравнение разных алгоритмов для одних и тех же условий невозможно без введения *критерия качества*, который позволяет *упорядочить алгоритмы*. При этом на рабочих характеристиках можно провести так называемые *линии изокритерия*. Эти линии определяют точки, в которых достигается наивысшее качество обнаружения в соответствии с данным критерием.

Для байесовских критериев линии изокритерия (минимального риска) есть линии постоянства порога Λ_B . Они проходят по точкам рабочих характеристик, касательные к которым имеют один и тот же наклон (пунктирные линии на рис. 1.7.1). Это нетрудно показать, используя свойства рабочих характеристик. Поскольку $D = \int_{\Lambda_T}^{\infty} w_1(\Lambda) d\Lambda$, $F = \int_{\Lambda_T}^{\infty} w_0(\Lambda) d\Lambda$, где $w_i(\Lambda)$ – плотность распределения отношения правдоподобия для гипотезы H_i , то, дифференцируя оба интеграла по нижнему пределу, получаем [5]

$$dD/d\Lambda_T = -w_1(\Lambda_T), \quad dF/d\Lambda_T = -w_0(\Lambda_T),$$

откуда $dD/dF = w_1(\Lambda_T)/w_0(\Lambda_T)$.

Отношение правдоподобия $\Lambda(s, y) = f_1(y)/f_0(y)$ инвариантно к преобразованиям наблюдений, которые сохраняют достаточность, поэтому $\Lambda(s, y) = w_1(\Lambda)/w_0(\Lambda)$ (напомним, что равенства здесь понимаются как численные, поскольку величины в правых и левых частях имеют разную природу). Отсюда следует, что $dD/dF = \Lambda_T$, т. е. тангенс угла наклона касательной к рабочей характеристике в выбранной точке равен порогу, который обеспечивает эти значения вероятностей D и F при использовании собственной статистики $\Lambda(s, y)$.

Подставляя вместо Λ_T байесовский порог Λ_B , получаем требуемый результат. Отсюда следует, что линия изокритерия для критерия максимального правдоподобия проходит через точки, в которых производная dD/dF равна единице (рис. 1.7.1).

Следует отметить, что свойство касательных к РХП справедливо лишь в том случае, когда характеристики построены для алгоритма $\Lambda(s, y) \geq \Lambda_T$, связанного с формированием отношения правдоподобия (так называемые *собственные* РХП). Использование решающей статистики другого вида (пусть даже и достаточной) приводит к рабочим характеристикам, не обладающим этим свойством.

Байесовские алгоритмы, рабочие точки которых расположены на одной линии изокритерия, являются оптимальными (т. е. имеющими минимальный средний риск по отношению ко всем другим) при заданном изменении модели. Пусть эти изменения приводят к улучшению обнаружимости сигнала (например, увеличиваются различия между характеристиками наблюдений при разных гипотезах вследствие увеличения энергии сигнала). Тогда рабочая точка движется по линии изокритерия в сторону точки ($F = 0$, $D = 1$), средний риск уменьшается и качество обнаружения растет, однако порог Λ_B остается постоянным. Положение линий байесовского изокритерия различно для разных моделей наблюдений, так как при этом изменяется сам ход рабочих характеристик.

Для критерия Неймана – Пирсона линии изокритерия представляют собой вертикальные прямые, проходящие через заданное значение вероятности ложной тревоги F_0 . При изменении модели, приводящем к улучшению обнаружимости, рабочая точка оптимального алгоритма движется по линии изокритерия вверх, вероятность правильного обнаружения увеличивается и качество обнаружения растет. Из рис. 1.7.1 также видно, что наклон касательных при движении рабочей точки изменяется: сначала растет, а потом уменьшается.

Таким образом, в отличие от байесовского порога Λ_B , который постоянен при изменении *условий обнаружения*, порог для критерия Неймана – Пирсона Λ_{NP} *не сохраняется постоянным*, а зависит от этих условий обнаружения (от характеристик сигналов и помех). Этот интересный факт становится понятным, если вернуться к уравнению для порога Неймана – Пирсона $\int_{\Lambda_{NP}}^{\infty} w_0(\Lambda) d\Lambda = F_0$, в котором от модели сигналов и помех зависит функциональный вид отношения правдоподобия, а следовательно, и плотность вероятности $w_0(\Lambda)$.

Рабочие характеристики, изображенные на рис. 1.7.1, соответствуют *упорядоченным* моделям, поскольку не имеют точек пересечения. В этих случаях можно ввести *параметр обнаружения*, отражающий такое упорядочение. Традиционно в качестве такого параметра выступает *отношение сигнал/шум*. Следует сразу же отметить, что отношение сигнал/шум не имеет однозначного определения. Не останавливаясь пока на этом вопросе, предположим, что введен параметр обнаружения λ , позволяющий упорядочить модели и соответствующие рабочие характеристики таким образом, что его возрастание соответствует увеличению различий между $f_1(y)$ и $f_0(y)$, т. е. увеличению *обнаружимости* сигнала. Этот параметр фактически упорядочивает сигнально-помеховые ситуации.

При использовании критерия Неймана – Пирсона нетрудно перейти к *характеристикам обнаружения* (иногда их называют *кривыми обнаружения* $D = f(\lambda)$, одна из которых показана на рис. 1.7.2, справа. Характеристика обнаружения соответствует точкам пересечения упорядоченных рабочих характеристик с соответствующей линией изокритерия.

Появление полезного сигнала часто вызывает достаточно сложные изменения формы распределений на выходе приемника. Это влияет на распределение решающей статистики. В связи с этим имеются трудности введения рационального параметра, отражающего степень различия распределений. Часто считается, что наибольшие изменения претерпевает математическое ожидание решающей статистики.

Классическое отношение сигнал/шум по напряжению (при когерентном накоплении), или *дефлексия* (решающей статистики), вводится следующим образом: $d = (m_1 - m_0) / \sigma_0$, где $m_i = M_i(u)$ – математическое ожи-

дание решающей статистики u при гипотезе H_i , σ_0 – среднеквадратиче-
ское значение распределения $f_0(u)$. Однако в качестве параметра обнару-
жения дефлексия не всегда удобна, так как не отражает изменений диспер-
сии статистики u при появлении сигнала.

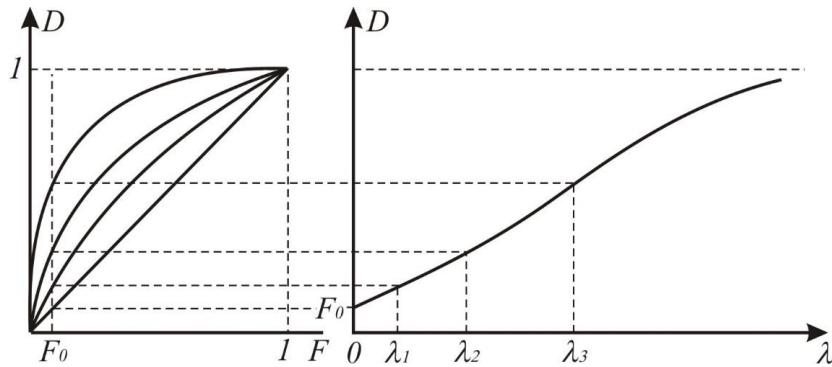


Рис. 1.7.2. Вертикальная линия изокритерия
для критерия Неймана – Пирсона (слева)
и характеристика обнаружения (справа)

Во многих практически важных случаях появление полезного сигнала
вызывает увеличение мощности на выходе накопителя, поэтому разумно
ввести отношение сигнал/шум по мощности как относительное изменение
второго момента распределения решающей статистики: $q^2 = (P_1 - P_0)/P_0$,
где $P_i = M_i(u^2)$ – второй момент распределения $f_i(u)$ при гипотезе H_i .

Для байесовских критериев упорядочение рабочих характеристик дает
возможность построить зависимости среднего риска от параметра обнару-
жения.

Обычно рассчитывается суммарная вероятность ошибочного приема
(кривая вероятности ошибки) $P_e(\lambda) = (F + (1 - D)) / 2$ (рис. 1.7.3, а).
Если $\lambda = 0$ соответствует отсутствию сигнала, то $P_e(0) = 1/2$. Минимум
этой вероятности соответствует байесовскому критерию максимального
правдоподобия.

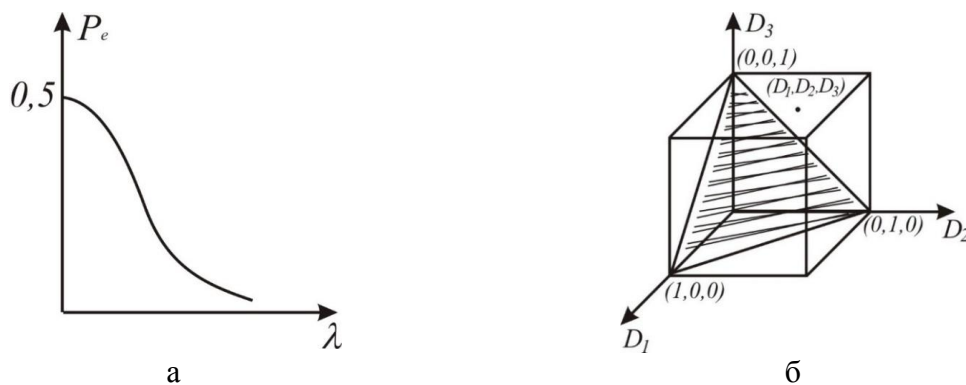


Рис. 1.7.3. Кривая вероятности ошибок (а)
и обобщение рабочих характеристик на случай $M = 3$ (б)

Возможно обобщение рабочих характеристик для многоальтернативной задачи. На рис. 1.7.3, б, по осям отложены вероятности правильных решений $D_i = P(d_i | H_i)$ для $M = 3$. Рабочая точка (D_1, D_2, D_3) располагается внутри куба выше сечения его плоскостью, проходящей через точки $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$. При изменении порогов рабочая точка перемещается по выпуклой поверхности, соответствующей заданной модели различения. Указанная поверхность и представляет собой рабочую характеристику. Заметим, правда, что рабочая точка не отражает различия вероятностей ошибок для каждого события.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ОДНОКРАТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

2.1. Обнаружение сдвига гауссовского распределения

Пусть наблюдение y представляет собой напряжение на выходе приемного канала, имеющее гауссовское распределение

$$f(y) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(y-m)^2/2\sigma^2),$$

т. е. $y \sim N(m, \sigma^2)$,

Уникальным свойством гауссовского распределения является наличие только двух первых ненулевых кумулянтов, которые и являются параметрами распределения.

Сформулируем задачу обнаружения: имеются события $m = m_0$ (шумовое напряжение), $m = m_1$ (смесь сигнала и шума), т. е. сигналом является сдвиг распределения или разность $\Delta = m_1 - m_0$. Однократное наблюдение y при разных гипотезах описывается двумя распределениями вероятности: $H_0: y \sim N(m_0, \sigma_0^2)$, $H_1: y \sim N(m_1, \sigma_0^2)$, где параметры m_0 , m_1 (математические ожидания) и дисперсия σ_0^2 известны, при этом $m_1 = m_0 + \Delta$.

Принятие решения в пользу гипотезы H_1 соответствует обнаружению сдвига (сигнала) Δ гауссовского распределения относительно исходного значения m_0 . Данная постановка представляет собой частный случай задачи $(N - N)$ обнаружения.

Оптимальный алгоритм формирует логарифм отношения правдоподобия $\ln \Lambda(\Delta, y) = (\Delta/\sigma_0^2)y - (m_1^2 - m_0^2)/2\sigma_0^2$ и сравнивает его с порогом $\ln \Lambda_T$. Поскольку достаточная статистика монотонна по y , оптимальное обнаружение положительного сдвига ($m_1 > m_0$) осуществляется при $y \geq y_T$, где $y_T = (\sigma_0^2/\Delta)\ln \Lambda_T + (m_0 + m_1)/2$. Обнаружение известного отрицательного сдвига будет при $y < y_T$.

При использовании байесовских критериев все параметры задачи оказываются существенными, так как входят в порог. При фиксированном значении $\ln \Lambda_T = \ln \Lambda_B$ байесовский порог y_B будет зависеть от предполагаемого сдвига Δ . В частном случае критерия максимального правдоподобия $\ln \Lambda_B = 0$ и $y_B = (m_0 + m_1)/2$. Дисперсия наблюдений теперь будет несущественным параметром, так как порог y_B располагается посередине между двумя известными математическими ожиданиями, но зависит от величины и знака сдвига.

Для критерия Неймана – Пирсона при обнаружении положительного сдвига порог $y_{NP} = m_0 + c_F \sigma_0$, где c_F обозначает $100 \cdot F$ -процентную точку стандартного нормального распределения, так что

$$F = 1 - \Phi((y_{NP} - m_0)/\sigma_0) = 1 - \Phi(c_F),$$

где $\Phi(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/2) dt$ – интеграл вероятности (в форме Лапласа). Порог y_{NP} не зависит от величины сдвига Δ , который в данном случае не будет существенным параметром, но существенным остается знак этого сдвига. Кроме того, существенным параметром остается дисперсия шума σ_0^2 .

Введя в качестве параметра обнаружения относительный сдвиг $d = \Delta/\sigma_0$, нетрудно получить выражение для характеристик обнаружения положительного сдвига $D = 1 - \Phi(c_F - d) = \Phi(d - c_F)$. Величина d есть входное отношение сигнал/шум, которое совпадает с дефлексией решающей статистики y . Характеристики обнаружения в логарифмическом масштабе представлены на рис. 2.1.1 штриховыми линиями для $F_0 = 10^{-2}, 10^{-3}$.

Критерий максимального правдоподобия минимизирует полную (суммарную) вероятность ошибки $P_\Sigma = (F + 1 - D)/2$, которая в данном случае равна $P_\Sigma = 1 - \Phi(d/2)$. Зависимости ее от отношения сигнал/шум изображены сплошной линией на рис. 2.1.2.

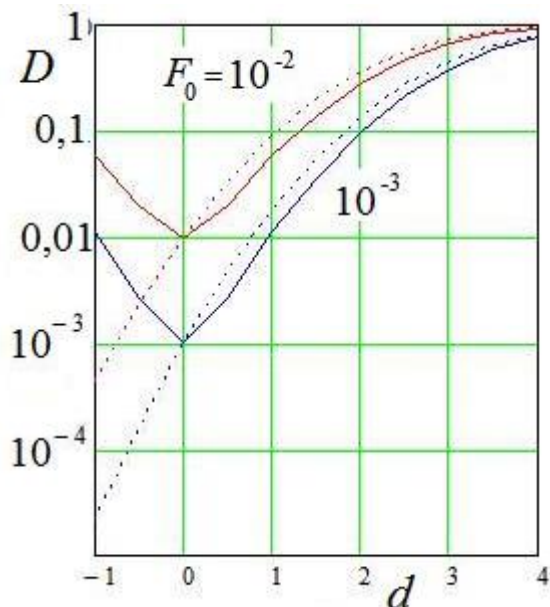


Рис. 2.1.1. Характеристики обнаружения сдвига гауссовского распределения

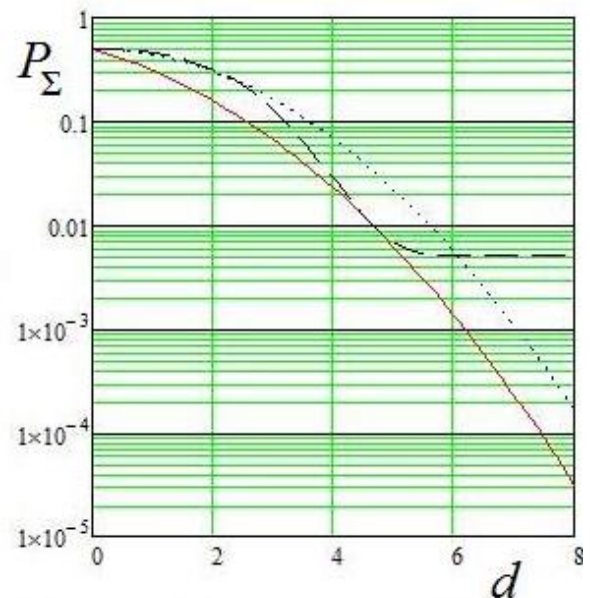


Рис. 2.1.2. Кривые вероятности ошибки при обнаружении сдвига гауссовского распределения

Полезная верхняя граница для этой вероятности дается формулой $P'_\Sigma = (1/2)\exp(-d^2/8)$, и соответствующая линия дана пунктиром.

Если применить критерий Неймана–Пирсона, то суммарная вероятность ошибки будет, безусловно, больше. Это показывает штриховая линия на рис. 2.1.2, которая построена для вероятности ложной тревоги $F_0 = 10^{-2}$. Это не говорит о том, что критерий Неймана–Пирсона хуже, просто у этих двух критериев разные целевые функции. Но для одного значения дефлексии результаты двух критериев совпадают, и это значение зависит от вероятности ложной тревоги. В данном случае при $d = 4,66$ имеем $F = 10^{-2}$ и $D = 0,99$, при этом обеспечивается минимальная суммарная вероятность ошибки $P_\Sigma = 0,01$.

Рабочие характеристики в системе так называемых «нормальных» координат (которые получаются путем обращения интеграла вероятности) представляются прямыми линиями и записываются весьма просто: $c_D = c_F - d$, где новые переменные (процентные точки) c_D и c_F связаны с D и F нелинейными преобразованиями $D = 1 - \Phi(c_D)$, $F = 1 - \Phi(c_F)$. Заметим, что значения c_F и c_D будут отрицательными для вероятностей $F > 0,5$ и $D > 0,5$. Поэтому правильнее будет рассматривать зависимости $-c_D = -c_F + d$, которые будут иметь привычный вид (рис. 1.7.1).

Если решающее правило построено для обнаружения положительного сдвига (*односторонняя* альтернатива), а на самом деле сдвиг отрицателен ($d < 0$), то, как видно из характеристик обнаружения, алгоритм оказывается *смещенным*. Смещение проявляется в том, что при появлении сигнала (отрицательной полярности) вероятность правильного обнаружения оказывается меньше, чем вероятность ложной тревоги при отсутствии сигнала. Несмещенный алгоритм должен учитывать знак сдвига распределения и соответственно изменять свою структуру.

Таким образом, если не накладывать ограничений на диапазон изменений Δ (*двусторонняя* альтернатива) и на класс алгоритмов, то не существует равномерно наиболее мощного (РНМ) решающего правила (с единым видом критической области) для рассмотренной задачи обнаружения при всех возможных изменениях Δ .

Однако если ограничиться только несмещенными правилами, то *несмещенный РНМ алгоритм для двусторонней альтернативы* существует и имеет вид $|y - m_0| \geq c_{F/2} \sigma_0$. Его критическая область в отличие от предыдущих алгоритмов определяется двумя порогами $m_0 \pm c_{F/2} \sigma_0$, а характеристики обнаружения (на рис. 2.1.1 – сплошные линии) рассчитываются по формуле $D = 1 - \Phi(c_{F/2} - d) - \Phi(-c_{F/2} - d)$. Переход к несмещенному алгоритму позволил преодолеть существенность знака сдвига распределе-

ния ценою некоторого снижения качества обнаружения (по сравнению со сдвигом известного знака).

Рассмотрим другой вариант выбора параметра обнаружения. Введем относительное изменение второго момента статистики y или *отношение сигнал/шум по мощности* $q^2 = (P_1 - P_0) / P_0$, где $P_0 = m_0^2 + \sigma_0^2$, $P_1 = m_1^2 + \sigma_0^2$. Введя параметр $\gamma_0 = m_0 / \sigma_0$, получаем связь между q^2 и дефлексией d в виде $q^2 = d(d + 2\gamma_0) / (1 + \gamma_0^2)$. Ясно, что эта связь сильно зависит от значения γ_0 , т. е. от исходного расположения шумового распределения. Если $m_0 = 0$, то $q^2 = d^2$. При построении характеристик обнаружения в зависимости от q^2 получается целое семейство кривых для каждого значения d и разных γ_0 .

При известном значении m_0 этот параметр может быть исключен из наблюдения, поэтому зависимость характеристик обнаружения от γ_0 представляется искусственной. Таким образом, в данной задаче использование дефлекции в качестве параметра обнаружения оказывается более удобным. В то же время существенность и значимость параметра m_0 не вызывает сомнений, и это проявляется в условиях априорной неопределенности, т. е. незнания этого параметра.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма $y \geq y_T$ к изменениям математического ожидания m_0 распределения, определить относительную величину значимых изменений, приводящих к двукратному увеличению вероятностей ошибок.

2. Исследовать чувствительность алгоритмов к изменениям СКО σ_0 распределения и определить относительную величину значимых изменений.

3. Изучить зависимость суммарной вероятности ошибки $P_\Sigma = (F + (1 - D)) / 2$ при заданных F и D от значения порога.

4. Исследовать потери в пороговой дефлексии, которые возникнут при использовании несмещенного алгоритма $|y - m_0| > c_{F/2} \sigma_0$ в ситуации известного знака сдвига.

2.2. Обнаружение изменения дисперсии гауссовского распределения

Задача обнаружения включает гипотезы относительно событий $\sigma^2 = \sigma_0^2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2$ и однократное наблюдение y , статистическое описание которого

дается гипотезами: $H_0: y \sim N(m_0, \sigma_0^2)$, $H_1: y \sim N(m_0, \sigma_1^2)$, где значения параметров известны. Предположим, что дисперсия увеличивается при появлении сигнала, т. е. $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$. Введем относительное увеличение дисперсии $\gamma = (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) / \sigma_0^2$, которое может служить параметром обнаружения. Заметим, что всегда $\gamma \geq -1$. Очевидно, что дефлексия $d = (m_1 - m_0) / \sigma_0$ в этом случае не является параметром обнаружения, поскольку $m_1 = m_0$, она равна нулю независимо от значений дисперсии. Эта постановка также представляет собой частный случай задачи $(N - N)$ обнаружения.

Логарифм отношения правдоподобия определяется выражением

$$\ln \Lambda(\gamma, y) = \left((y - m_0)^2 / 2 \right) (1/\sigma_0^2 - 1/\sigma_1^2) + \ln(\sigma_0/\sigma_1),$$

поэтому решение в пользу H_0 принимается при

$$(y - m_0)^2 \geq 2\sigma_0^2\sigma_1^2 (\ln(\Lambda_T \sigma_1 / \sigma_0)) / (\sigma_1^2 - \sigma_0^2).$$

Эквивалентное решающее правило $|y - m_0| \geq y_T$ представляет собой двухпороговый алгоритм. Его вид такой же, как и в случае обнаружения сдвига распределения неизвестного знака. Если $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$, то получаем $|y - m_0| \leq y_T$.

Существенный параметр m_0 непосредственно входит в алгоритмы, и является значимым, когда он неизвестен. Параметры σ_1 и σ_0 оказываются существенными при байесовских критериях оптимальности. Для критерия Неймана – Пирсона величина σ_1 не существенна, но существенным остается знак разности $\sigma_1^2 - \sigma_0^2$.

Характеристики обнаружения определяются формулой $D = 2(1 - \Phi(c_{F/2} / \sqrt{1 + \gamma}))$. Рассмотрим случай увеличения дисперсии наблюдений, когда $\gamma > 1$. Если $m_0 = 0$, то параметр обнаружения γ равен относительному увеличению мощности наблюдения q^2 . Нетрудно установить, что такое же относительное изменение мощности $q^2 = \Delta^2 / \sigma_0^2 = d^2$ вследствие сдвига плотности (в любую сторону) обнаруживается данным алгоритмом более эффективно.

Это иллюстрируют характеристики обнаружения на рис. 2.2.1 для $F_0 = 10^{-2}$ (слева) и $F_0 = 10^{-3}$ (справа), где сплошные линии 1 построены для случая обнаружения сдвига среднего значения (соответствуют сплошным линиям на рис. 2.1.1), а пунктирные линии 2 построены для $m_0 = 0$, $q^2 = \gamma$ и отражают качество обнаружения увеличения дисперсии гауссовского распределения.

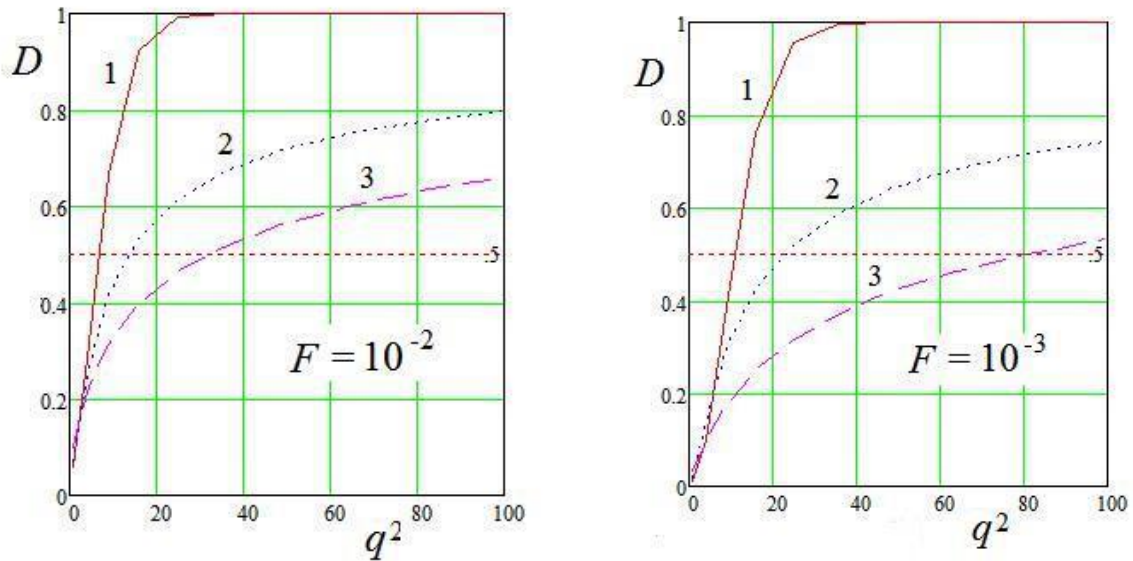


Рис. 2.2.1. Характеристики обнаружения для задач $(N-N)$ (линии 1 и 2) и задач $(E-E)$ (линия 3)

Потери в пороговом отношении сигнал/шум q^2 составляют не меньше 3 дБ (т. е. двукратные) для вероятности правильного обнаружения $D = 0,5$ и существенно возрастают для больших уровней D . Это означает, что изменение мощности при сдвиге гауссовского распределения обнаруживается гораздо легче, чем при изменении его дисперсии.

Линии 3 на рис. 2.2.1 построены для задачи обнаружения сдвига математического ожидания (изменения параметра масштаба) экспоненциального распределения. Они показывают существенные проигрыши в пороговом отношении сигнал/шум при отличии распределения от гауссовского.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма $|y - m_0| \geq y_T$ к отклонению сдвига распределения от предполагаемого значения. Определить относительные значимые отклонения, приводящие к двукратным ухудшениям вероятностных характеристик.

2. Исследовать чувствительность алгоритма к отклонению дисперсии σ_0^2 от предполагаемого значения, рассчитать относительные значимые отклонения.

3. Предложить алгоритм обнаружения для случая одновременного изменения математического ожидания и дисперсии гауссовского распределения, сравнить такой алгоритм с предыдущим вариантом и рассчитать возможный выигрыш.

2.3. Обнаружение изменения масштаба экспоненциального распределения

Пусть наблюдение y имеет экспоненциальное распределение $y \sim E(\beta)$ или $f(y) = (1/\beta)\exp(-y/\beta)$, где $\beta > 0$ – параметр масштаба. Математическое ожидание и дисперсия равны $m = \beta$, $\sigma^2 = \beta^2$. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны соответственно $\gamma_3 = 2$ и $\gamma_4 = 6$.

Параметрическая ($E - E$) задача обнаружения формулируется следующим образом: $H_0 : \beta = \beta_0$, $H_1 : \beta = \beta_1$, где $\beta_1 \neq \beta_0$ – известные значения.

Нетрудно убедиться, что алгоритм оптимального обнаружения увеличения масштаба ($\beta_1 > \beta_0$) имеет вид $y \geq y_T$. Поскольку параметр β является также математическим ожиданием экспоненциального распределения, задача обнаружения изменения масштаба одновременно является обнаружением сдвига математического ожидания.

Вероятность ложной тревоги $F = \exp(-y_T / \beta_0)$, вероятность правильного обнаружения $D = \exp(-y_T / \beta_1)$, поэтому рабочая характеристика имеет вид $D = F^{1/(1+d)}$, где в качестве параметра обнаружения введено относительное изменение масштаба $d = (\beta_1 - \beta_0) / \beta_0$. В данном случае эта величина оказывается дефлексией решающей статистики y . Байесовский порог обнаружения получается в виде $y_B = (\ln \Lambda_B + 1 + d)\beta_0(1 + d) / d$.

Запишем вероятности D и F в форме степеней: $F = 10^{-a}$, $D = 10^{-b}$. Значения a и b представляют собой индексы ложной тревоги и правильного обнаружения. Для уровней $D = 0,5$ и $D = 0,9$ значения индекса правильного обнаружения будут $b = 0,301$ и $b = 0,046$ соответственно.

В случае критерия Неймана – Пирсона порог $y_{NP} = a\beta_0 / \lg e$, где $a = -\lg F$, и существенными будут параметр β_0 и знак величины d . Рабочие характеристики имеют вид $-b = -a / (1 + d)$, в логарифмическом масштабе по D и F они представляются прямыми линиями, которые приведены на рис. 2.3.1 для $d = 0,1,2$. На этом же рисунке пунктиром представлены рабочие характеристики для задачи ($N - N$), которая рассматривалась в разд. 2.1. Экспоненциальное распределение вносит существенные потери по сравнению с гауссовским при обнаружении сдвигов распределения.

Ясно, что параметры β_0 и β_1 являются существенными для байесовского критерия, а для критерия Неймана – Пирсона существенными будут β_0 и знак изменения масштаба. Пороговая дефлексия, обеспечивающая заданные значения вероятностей (D, F), определяется формулой $d_{D,F} = a / b - 1$. Введем отношение $\mu = a / b = \lg F / \lg D$, которое зависит от a , как показано

на рис. 2.3.2, где линии $10\lg\mu$ построены для $D = 0,5; 0,9; 0,95; 0,99$. Это отношение играет ключевую роль при вычислении пороговых значений и их сравнении в разных задачах обнаружения и различения.

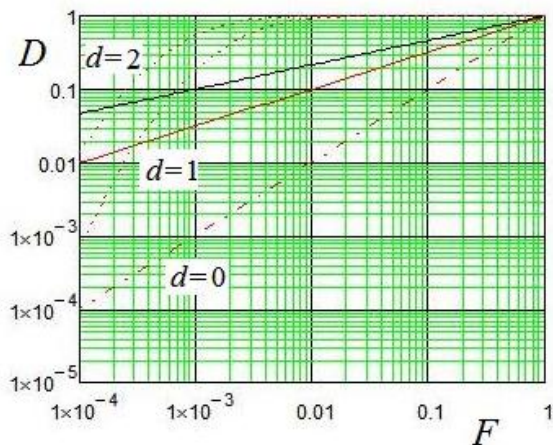


Рис. 2.3.1. Рабочие характеристики для задачи $(E - E)$

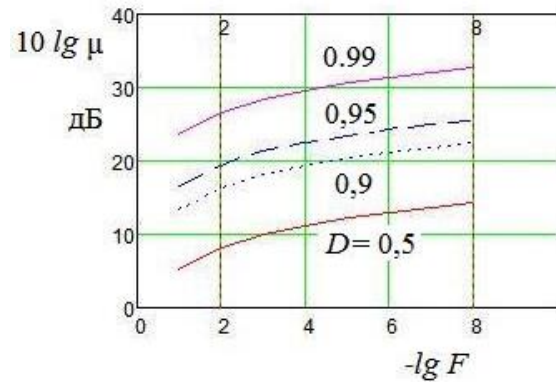


Рис. 2.3.2. Зависимости $10\lg\mu$, дБ, от индекса ложной тревоги

Очевидно, что $d_{D,F} = \mu - 1$, а поскольку значения μ часто бывают достаточно велики в практически важном диапазоне изменений D и F , то $d_{D,F} \approx \mu$. Таким образом, график на рис. 2.3.2 фактически отражает поведение пороговой дефлексии и показывает довольно сильную зависимость ее от заданного уровня вероятности правильного обнаружения. Так, разница между $d_{0,5;F}$ и $d_{0,9;F}$ составляет примерно 8 дБ, а между $d_{0,5;F}$ и $d_{0,99;F}$ целых 18 дБ. Эта разница практически постоянна при изменениях F от 10^{-2} до 10^{-8} (границы интервала показаны на рис. 2.3.2).

От пороговой дефлексии нетрудно перейти к пороговому отношению сигнал/шум по мощности $q_{D,F}^2 = d_{D,F}(d_{D,F} + 2) = \mu^2 - 1 \approx \mu^2$. Соответствующие характеристики обнаружения обозначены на рис. 2.2.1 ($F = 10^{-2}$ и $F = 10^{-3}$) штриховыми линиями 3. Сравнение с задачей $(N - N)$ и здесь показывает весьма существенное ухудшение качества обнаружения, вызванное переходом к экспоненциальному распределению.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма к изменению параметра β_0 . Определить относительные значимые изменения, приводящие к двукратному ухудшению вероятностных характеристик.
2. Исследовать алгоритм обнаружения уменьшения параметра масштаба, сравнить эффективность со случаем увеличения масштаба.
3. Предложить возможные алгоритмы различения экспоненциального и гауссовского распределений при одинаковых значениях математического ожидания и дисперсии. Рассчитать эффективность такого различения.

2.4. Обнаружение изменения масштаба рэлеевского распределения

Постановка задачи полностью аналогична предыдущей, но наблюдение имеет рэлеевское распределение: $y \sim R(\beta)$, т. е. $f(y) = (2y/\beta^2) \exp(-y^2/\beta^2)$, где $\beta > 0$ – параметр масштаба. Математическое ожидание и дисперсия равны $m = \beta\sqrt{\pi/4} = 0,886\beta$, $\sigma^2 = (4 - \pi)\beta^2/4 = 0,215\beta^2$, мощность равна $P = \beta^2$. Коэффициенты асимметрии и эксцесса меньше, чем у экспоненциального распределения $\gamma_3 = 0,63$ и $\gamma_4 = 0,232$.

При обнаружении увеличения масштаба в задаче $(R - R)$ оптимальная решающая статистика y^2 сравнивается с порогом. Поскольку $y \geq 0$, оптимальный алгоритм принимает вид $y \geq y_T$, где порог зависит от критерия оптимальности.

Для критерия Неймана – Пирсона порог $y_{NP} = \beta_0(a/\lg e)^{1/2}$ имеет меньшие значения, чем для случая экспоненциального распределения с тем же масштабом. Рабочие характеристики имеют вид $D = F^{1/(1+q^2)}$, где $q^2 = (\beta_1^2 - \beta_0^2)/\beta_0^2$ – отношение сигнал/шум по мощности. Нетрудно установить, что пороговые отношения сигнал/шум равны $q_{D,F}^2 = \mu - 1 \approx \mu$. Это существенно лучше, чем для предыдущей задачи $(E - E)$, где $q_{D,F}^2 = \mu^2 - 1 \approx \mu^2$.

Характеристики обнаружения приведены на рис. 2.4.1: верхние кривые – для задачи $(R - R)$, нижние – для задачи $(E - E)$, сплошные линии соответствуют вероятности ложной тревоги $F = 10^{-2}$, а штриховые – $F = 10^{-3}$.

Байесовский порог

$$y_B = [(\ln \Lambda_B + \ln(1 + q^2))] \cdot \beta_0^2 (1 + 1/q^2)$$

зависит от отношения сигнал/шум q^2 , что означает существенность обоих параметров β_0 и β_1 , тогда как для критерия Неймана – Пирсона существенны β_0 и знак разности $\beta_1^2 - \beta_0^2$. Для обнаружения уменьшения масштаба гипотезы просто меняются местами.

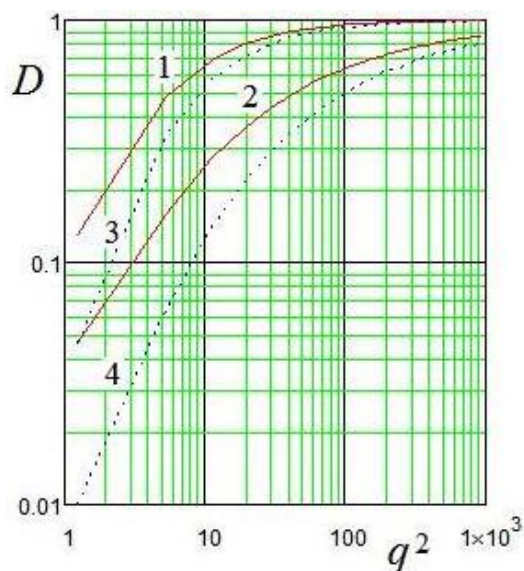


Рис. 2.4.1. Характеристики обнаружения:
для задачи $(R - R)$ – кривые 1 и 3,
для задачи $(E - E)$ – кривые 2 и 4

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма к изменению параметра β_0 . Рассчитать относительные существенные отклонения, приводящие к двукратному ухудшению вероятностей ошибок.

2. Исследовать алгоритм обнаружения уменьшения параметра масштаба, сравнить эффективность со случаем увеличения масштаба.

3. Предложить алгоритм различения рэлеевского распределения от гауссовского с теми же математическим ожиданием и дисперсией, рассчитать эффективность такого различения.

4. Предложить возможные алгоритмы различения экспоненциального и рэлеевского распределений в случае одинаковых математических ожиданий, а также при одинаковых мощностях статистик.

2.5. Обнаружение изменения параметра распределения Пуассона

Случайные потоки событий или сигналов представляют важные модели наблюдений в радиотехнических задачах [4]. Пуассоновский поток отличается тем, что в каждый момент времени может произойти только одно событие (ординарность), а случайные интервалы между событиями (точками) взаимно независимы и распределены экспоненциально. Пусть наблюдается пуассоновский поток с интенсивностью ν (число точек в секунду). Тогда вероятности получить ровно k точек за время T подчиняются закону Пуассона $P(y = k) = (\nu T)^k \exp(-\nu T) / k!$, где ν есть интенсивность потока (число событий в секунду). Обычно вводится параметр $\lambda = \nu T$ – среднее число событий (математическое ожидание). Уникальным свойством распределения Пуассона является то, что все кумулянты (математическое ожидание, дисперсия, асимметрия, эксцесс и т. д.) одинаковы и равны λ . Вид распределения Пуассона для $\lambda = 4$ приведен на рис. 2.5.1.

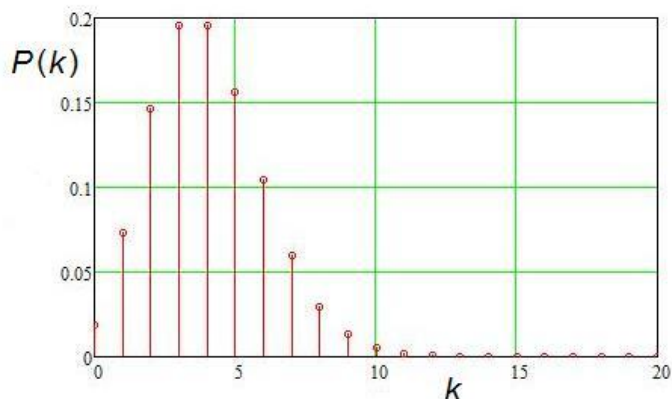


Рис. 2.5.1. Распределение Пуассона

Параметрическая задача ($P - P$) формулируется так: $H_0: v = v_0$, $H_1: v = v_1$, где $v_1 \neq v_0$ – известные значения. Параметр v_0 есть интенсивность фона, а разность $\Delta v = v_1 - v_0$ характеризует полезный сигнал. Будем считать, что появление сигнала увеличивает интенсивность потока случайных точек, т. е. разность $\Delta v > 0$.

Существует два способа регистрации случайных потоков: *режим прямой выборки*, когда производится счет точек на фиксированном интервале времени, и *режим обратной выборки*, при котором измеряются случайные временные интервалы, включающие заданное число событий. Пусть требуется обнаружить изменение интенсивности пуассоновского потока, связанное с появлением полезного сигнала.

В режиме прямой выборки (счета событий) наблюдениями являются случайные числа (отсчеты) k , получаемые в результате подсчета числа случайных точек пуассоновского потока за фиксированный интервал времени T .

В качестве параметра обнаружения введем относительное изменение интенсивности потока $\delta = (v_1 - v_0) / v_0 = (\lambda_1 - \lambda_0) / \lambda_0$. Логарифм отношения правдоподобия равен $\ln \Lambda(k) = k \cdot \ln(1 + \delta) - \lambda_0 \delta$.

Эта функция случайна и непрерывна по параметру δ (разд. 1.3). Отсюда следует, что оптимальное обнаружение увеличения параметра δ осуществляется при $k \geq y_T$, где $y_T = (\ln \Lambda_T + \lambda_0 \delta) / \ln(1 + \delta)$ представляет собой так называемое *критическое число* [18]. Ввиду того что статистика k принимает только целочисленные значения, удобно переписать алгоритм в эквивалентном виде $k \geq k_T$, где порог k_T есть целая часть от y_T . При изменении Λ_T порог k_T меняется дискретно.

Особенностью задачи обнаружения для дискретных наблюдений является то, что вероятности ошибок ограничены. Минимальное ненулевое значение вероятности пропуска в данном случае есть $P_1(k=0) = \exp(-\lambda_1)$, а максимальное (отличное от единицы) значение вероятности ложной тревоги будет $1 - P_0(k=0) = 1 - \exp(-\lambda_0)$. Рабочие характеристики существуют только в отдельных точках и показаны крестиками на рис. 2.5.2 для $\lambda_0 = 4$ и $\lambda_1 = 8$.

Можно также вычислить дефлекцию $d = (M_1(k) - M_0(k)) / \sigma_0(k)$ решающей статистики k , которая оказывается

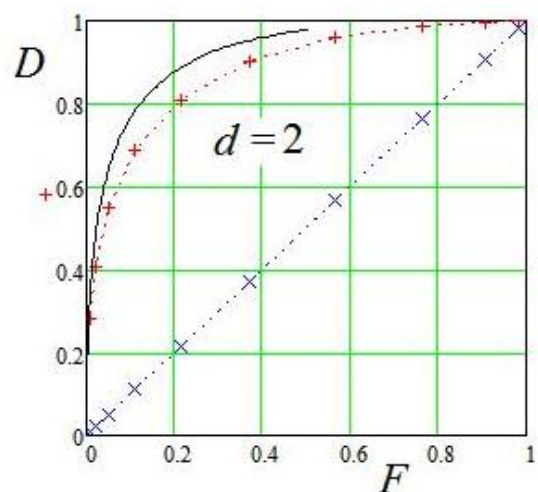


Рис. 2.5.2. Рабочие характеристики для задачи ($P - P$)

пропорциональной квадратному корню из интенсивности фона и времени регистрации, т. е. $d = \delta\sqrt{v_0T} = \delta\sqrt{\lambda_0}$. Таким образом, качество обнаружения улучшается при больших интенсивностях фона и длительной регистрации.

«Линия» байесовского изокритерия будет разрывной и представляет собой совокупность вертикальных отрезков, проходящих через каждую точку РХ. Они появляются потому, что для заданной величины λ_0 при увеличении λ_1 в определенных пределах вероятность ложной тревоги не меняется, поскольку не меняется порог k_T . Но при этом вероятность правильного обнаружения растет. Когда же порог принимает следующее целочисленное значение, вероятность ложной тревоги скачком уменьшается и опять сохраняется неизменной, а вероятность правильного обнаружения опять начинает непрерывно расти, но уже с более низкого уровня [18]. Зависимость вероятности ложной тревоги от значений критического числа представлена на рис. 2.5.3 для $\lambda_0 = 4$. Линии изокритерия для критерия Неймана – Пирсона являются вертикальными отрезками, проходящими через соответствующие точки рабочих характеристик.

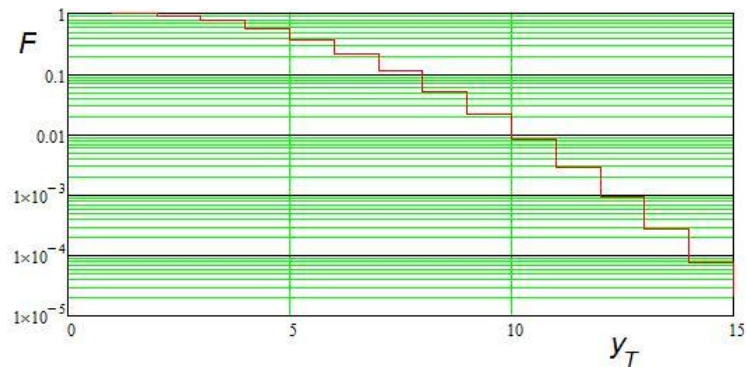


Рис. 2.5.3. Зависимость вероятности ложной тревоги от критического числа

Для байесовских критериев оба параметра λ_0 и λ_1 оказываются существенными. В случае критерия Неймана – Пирсона существенным будет только параметр λ_0 , поскольку значение δ не влияет на порог. Характеристики обнаружения $D = f(\delta, \lambda_0)$ начинаются с определенных дискретных значений вероятности ложной тревоги F и оказываются зависящими от конкретного значения λ_0 .

Из рис. 2.5.3 видно, что некоторые значения вероятности ложной тревоги (ВЛТ) обеспечить невозможно. Например, при $k_T = 9$ $F(9) = 0,021$, а при $k_T = 10$ будет уже $F(10) = 0,0081$, поэтому нет возможности, например, точно установить вероятность $F_0 = 0,01$. Для решения этой проблемы можно использовать «рандомизацию» решающего правила.

Рандомизированное решающее правило включает дополнительный случайный механизм принятия решения в случае, если $k = k_T$. Решение в пользу H_1 в этом случае принимается с вероятностью $\gamma = [F_0 - F(10)]/[F(9) - F(10)]$, т. е. для обеспечения заданной ВЛТ $F_0 = 0,01$ при значении статистики $k = 9$ порог считается превышенным с вероятностью $\gamma = 0,141$ и не превышенным с вероятностью $1 - \gamma = 0,859$. В случае рандомизации решающего правила точки на РХП соединяются прямыми линиями.

Фактически рандомизация требуется лишь при весьма слабых шумовых полях и малых интервалах наблюдения, т. е. при малых значениях λ_0 . На практике предпочтительнее построение нерандомизированного правила, как более простого. В этом случае можно положить $\gamma = 1$, и считать, что порог превышает при достижении значения k_T . При использовании критерия Неймана – Пирсона вводится ограничение на значение ВЛТ $F(k_T) \leq F_0$, в данном примере порог выбирается $k_T = 10$, при этом $F(10) < F_0$. Конечно, ограничение ВЛТ приводит к некоторым потерям в обнаружении, поскольку порог будет слегка завышен.

С увеличением λ_0 характеристики обнаружения приближаются к характеристикам для соответствующей гауссовской ($N - N$) задачи $H_0: y \sim N(m_0, \sigma_0^2)$ против гипотезы $H_1: y \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, где $m_0 = \sigma_0^2 = \lambda_0$ и $m_1 = \sigma_1^2 = \lambda_1$. Эта задача соответствует случаю одновременного увеличения математического ожидания и дисперсии распределения. Порог по критерию Неймана – Пирсона равен $y_{NP} = \lambda_0 + c_F \sqrt{\lambda_0}$.

Вводя дефлекцию решающей статистики $d = (\lambda_1 - \lambda_0) / \sqrt{\lambda_0} = \delta \sqrt{\lambda_0}$, получаем характеристики обнаружения в «нормальных» координатах в виде $-c_D = (-c_F + d) / \sqrt{1 + \delta}$, где процентная точка c_D удовлетворяет уравнению $D = 1 - \Phi(c_D)$. Значения c_D будут отрицательными для вероятностей $D > 0,5$. Отсюда следует, что абсолютная величина c_D при одинаковой дефлекции d и для той же процентной точки c_F будет меньше, чем в случае обнаружения сдвига гауссовского распределения, когда $-c_D = -c_F + d$. Следовательно, будет меньше и вероятность правильного обнаружения.

Рабочие характеристики для эквивалентной гауссовской задачи при $d = 2$ приведены на рис. 2.5.2 сплошной линией. Они проходят несколько выше пунктирных кривых для задачи ($P - P$).

Таким образом, в данном случае имеют место «потери» в пороговой дефлекции, которыми, правда, можно пренебречь при малых значениях $\delta = (\lambda_1 - \lambda_0) / \lambda_0$ либо при больших интенсивностях фона, т. е. при $\lambda_0 \gg d_{D,F}$. С уменьшением λ_0 в n раз пороговые значения $\delta_{D,F}$ возрастают

в \sqrt{n} раз (закон квадратного корня), что требует бóльших относительных изменений интенсивности для достижения того же качества обнаружения, что и для обнаружения только сдвига распределения.

Существует также метод *обратной* выборки для случайного потока точек. В этом случае также производится подсчет числа точек, однако наблюдением служит временной интервал $x = \tau_K$, необходимый для получения заданного числа точек K . В случае пуассоновского потока случайные временные интервалы между точками независимы и распределены экспоненциально, т. е. $f(\tau) = \nu \exp(-\nu\tau)$, а наблюдаемый временной интервал будет иметь распределение Эрланга: $f(x) = \nu^K x^{K-1} \exp(-\nu x) / (K-1)!$, которое является частным случаем гамма-распределения $\Gamma(\alpha, \beta)$ с параметрами формы $\alpha = K$ и масштаба $\beta = 1/\nu$.

Обнаружение увеличения интенсивности потока осуществляется при $x \leq x_T$, где пороговое значение устанавливается по выбранному критерию оптимальности обычным путем. Случай обнаружения изменения масштаба гамма-распределения обсуждается в разд. 2.7.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма к изменению параметра λ_0 . Определить относительные значимые отклонения, приводящие к двукратным ухудшениям вероятностей ошибок.
2. Построить характеристики обнаружения для режима прямой выборки и определить пороговые параметры обнаружения.
3. Рассчитать потери нерандомизированного обнаружителя по отношению к рандомизированному, определить параметры распределения Пуассона, при которых потери малы.
4. Рассчитать и построить характеристики обнаружения для метода обратной выборки. Сравнить характеристики обнаружения при методах прямой и обратной выборки, определить параметры, при которых характеристики совпадают.
5. Предложить возможные алгоритмы проверки пуассоновского характера потока точек.

2.6. Обнаружение изменения параметров логнормального распределения

Плотность вероятности логарифмического нормального распределения (логнормального распределения) дается выражением

$$f(y) = (y\sigma_l \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-(\ln(y/y_{\text{med}}))^2 / 2\sigma_l^2\right).$$

Здесь $y_{\text{med}} > 0$ – медиана (параметр масштаба), а $\sigma_l > 0$ – параметр формы, равный среднеквадратическому отклонению величины $\ln y$. Заметим, что параметр формы безразмерный, в отличие от СКО самой случайной величины y . При этом плотность $f(y)$ имеет размерность, обратную размерности y , что непосредственно следует из условия нормировки. Кроме того, все наблюдения неотрицательны: $y \geq 0$. Параметр формы связан также с *отношением математического ожидания к медиане* $\rho = m / y_{\text{med}} = \exp(\sigma_l^2/2)$. Отсюда следует, что $\rho > 1$, т. е. математическое ожидание всегда больше медианы.

Начальные моменты распределения $m_n = m^n \rho^{n(n-1)}$, где математическое ожидание $m = y_{\text{med}} \exp(\sigma_l^2/2)$. Дисперсия распределения $\sigma^2 = m^2(\rho^2 - 1)$ пропорциональна квадрату математического ожидания.

Часто практически более удобным параметром формы оказывается *коэффициент вариации*, который определяется как отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию $k_v = \sigma / m$. Можно показать, что $k_v^2 = \exp(\sigma_l^2) - 1 = \rho^2 - 1$. Любой кумулянтный коэффициент выражается через коэффициент вариации, в частности: $\gamma_3 = 3k_v + k_v^3$, $\gamma_4 = 16k_v^2 + 15k_v^4 + 6k_v^6 + k_v^8$.

Логарифмическое нормальное распределение представляет собой класс распределений с «тяжелыми хвостами» («heavy tails») и широко используется при моделировании реальных флуктуаций случайных сигналов и помех. Логнормальное распределение может быть получено из (порождающего) нормального распределения безразмерной случайной величины $z \sim N(\mu_l, \sigma_l^2)$ путем нелинейного экспоненциального преобразования $y = c_z \exp(z)$, где коэффициент c_z имеет размерность величины y и нужен только для обеспечения размерности. В дальнейшем будем считать его единичным. Медиана нового распределения $y_{\text{med}} = c_z \exp(\mu_l)$ оказывается параметром масштаба, а безразмерная дисперсия σ_l^2 определяет форму распределения и новые параметры ρ и k_v .

При обнаружении увеличения масштаба (медианы) в задаче ($LN - LN$) оптимальная решающая статистика $z = \ln y$ сравнивается с порогом z_T , и оптимальный алгоритм принимает вид $z \geq z_T$. Операция логарифмирования применима только к безразмерным величинам, поэтому, строго говоря, необходима предварительная нормировка наблюдения, так что статистика принимает вид $z = \ln(y / y_0)$, где, в частности, можно положить $y_0 = 1$.

Статистика $z = \ln(y / y_0)$ распределена нормально $N(\mu_l, \sigma_l^2)$, и задача обнаружения изменения масштаба логнормального распределения полно-

стью эквивалентна задаче обнаружения сдвига порождающего гауссовского распределения (разд. 2.1), где $\mu = \ln(y_{\text{med}}/y_0)$. Таким образом, сдвиг параметра μ_l для нормального распределения $z \sim N(\mu_l, \sigma_l^2)$ порождает изменение масштаба статистики $y = c_z \exp(z)$. В силу монотонности экспоненциальной функции оптимальный алгоритм можно записать в виде $y \geq y_T$, где порог $y_T = c_z \exp(z_T)$.

Рассмотрим две гипотезы относительно медианы логнормального распределения масштаба (параметра масштаба): $H_0: y_{\text{med}} = y_{\text{med}0} > 0$ и $H_1: y_{\text{med}} = y_{\text{med}1} > y_{\text{med}0}$. Задача их проверки соответствует проверке гипотезы $H_0: \mu_l = \mu_0$ против $H_1: \mu_l = \mu_1 > \mu_0$ с помощью алгоритма $z \geq z_T$ для порождающего нормального распределения.

Для критерия Неймана–Пирсона оптимальный порог равен $z_{NP} = \mu_0 + c_F \sigma_l$, где c_F – процентная точка для заданной вероятности ложной тревоги. Вероятность правильного обнаружения рассматривалась в разд. 2.1. Параметром обнаружения служила дефлексия $d = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma_l$, и ее пороговые значения характеризовали возможности обнаружения сдвига.

Для задачи $(LN - LN)$ порог Неймана–Пирсона по наблюдению y равен $y_{NP} = c_z \exp(\mu_0 + c_F \sigma_l) = y_{\text{med}0} \exp(c_F \sigma_l)$. Введем отношение сигнал/шум по мощности $q_{LN}^2 = y_{\text{med}1}^2 \rho^4 / y_{\text{med}0}^2 \rho^4 - 1 = y_{\text{med}1}^2 / y_{\text{med}0}^2 - 1$. Эта величина не зависит от параметра формы логнормального распределения. Представляют интерес пороговые значения $q_{LN}^2(D, F)$, обеспечивающие при данном пороге заданную вероятность правильного обнаружения. Их можно найти, если установить связь между q_{LN}^2 и d , т. е. дефлексией для порождающего нормального распределения.

Эта зависимость изображена на рис. 2.6.1 для $\sigma_l^2 = 0,5$. В первом приближении $q_{LN}^2 \approx d^4$. Вертикальные линии показывают пороговые значения для задачи $(N - N)$. Соответствующие пороговые значения для задачи $(LN - LN)$ оказываются существенно большими, что говорит о значительно худшей ситуации при обнаружении изменения масштаба логнормального распределения, чем в случае обнаружения сдвига гауссовского распределения. Например, вместо отношений сигнал/шум 6–10 дБ при обнаружении сдвига гауссовского распределения в данном случае получаем 14–19 дБ, т. е. ухудшение в 6–8 раз.

В случае обнаружения изменения параметра формы σ_l логнормального распределения задача оказывается эквивалентной задаче обнаружения изменения масштаба гауссовского распределения (разд. 2.2). Введя относительное изменение $\gamma = (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) / \sigma_0^2$ для параметра формы σ_l^2 , можно вычислить соответствующее отношение сигнал/шум по мощности $q_{LN}^2 = \rho_1^4 / \rho_0^4 - 1$

для статистики $y = c_z \exp(z)$. График зависимости q_{LN}^2 от γ представлен на рис. 2.6.2, где обе величины отложены в децибелах.

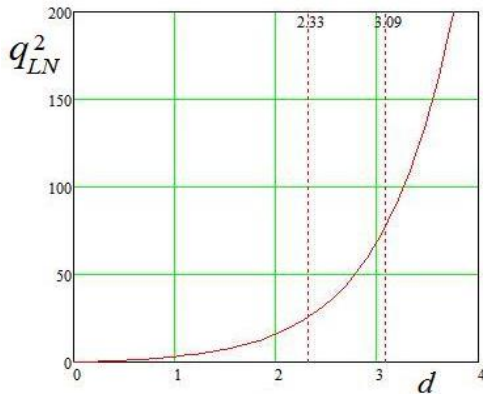


Рис. 2.6.1. Связь между параметрами обнаружения q_{LN}^2 и дефлекцией порождающего нормального распределения d

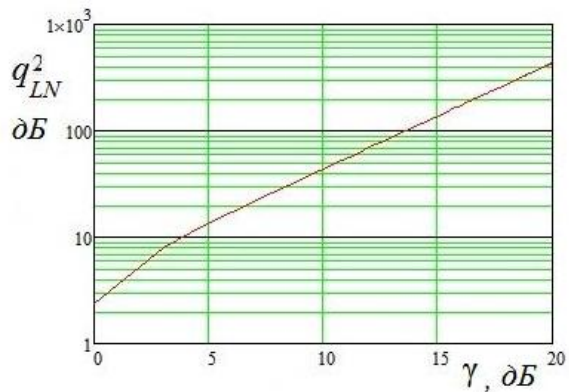


Рис. 2.6.2. Связь между параметрами обнаружения q_{LN}^2 и γ

Анализ показывает, что обнаружение изменения параметра формы логнормального распределения требует существенно бóльших пороговых отношений сигнал/шум по мощности, чем обнаружение изменения масштаба этого распределения.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма к изменению параметров y_{med} и σ_l . Определить существенные относительные отклонения этих параметров, приводящие к удвоению вероятностей ошибок. Сравнить со случаем гауссовской статистики.
2. Рассчитать пороговые отношения сигнал/шум для вероятности правильного обнаружения $D = 0,5$ и попытаться аппроксимировать зависимость $q_{0,5}^2$ от μ степенной зависимостью $q_{0,5}^2 \sim k\mu^n$, желательно линейной или квадратичной функцией.
3. Предложить возможные алгоритмы различения логнормального и гауссовского распределений.
4. Предложить возможные алгоритмы различения логнормального и экспоненциального распределений.

2.7. Обнаружение изменения параметра масштаба гамма-распределения

Плотность вероятности гамма-распределения $G(\alpha, \beta)$ дается выражением $f(y) = (1/\beta\Gamma(\alpha))(y/\beta)^{\alpha-1} \exp(-y/\beta)$, где $\beta > 0$ – параметр масштаба,

$\alpha > 0$ – параметр формы, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Для целочисленных значений $\alpha = n$ гамма-распределение $G(n, 1)$ можно получить, суммируя логарифмы независимых случайных величин $x \sim U(0,1)$, равномерно

распределенных на интервале $(0,1]$: $y = -\sum_{i=1}^n \ln x_i$. Это эквивалентно суммированию n экспоненциально распределенных случайных величин или же суммированию $N = 2n$ гауссовских $N(0,1)$. Этот случай приводит к распределению

χ_N^2 с N степенями свободы $f(y) = y^{N/2-1} \exp(-y/2) / (2^{N/2} \Gamma(N/2))$, которое имеет большое практическое значение. Для дробных значений параметра формы моделирование требует специальных методов.

При $\alpha = 1$ распределение $G(\alpha, \beta)$ переходит в экспоненциальное $E(\beta)$, которое является общим для семейств гамма-распределений и распределений Вейбулла. С увеличением параметра формы α коэффициент вариации $k_v = 1/\sqrt{\alpha}$ уменьшается, т.е. плотности гамма-распределения, как и в случае семейства Вейбулла, все больше концентрируются около математических ожиданий. Однако при этом увеличиваются как математическое ожидание $m = \alpha\beta$, так и дисперсия $\sigma^2 = \alpha\beta^2$. Мощность (второй начальный момент) случайной величины с гамма-распределением равна $m_2 = P = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны $\gamma_3 = 2/\sqrt{\alpha}$, $\gamma_4 = 6/\alpha$, и также убывают с увеличением параметра формы.

Рассмотрим задачу обнаружения изменения параметра масштаба, т.е. задачу $(G(\alpha, \beta_0) - G(\alpha, \beta_1))$ с известным параметром формы $\alpha \neq 1$. Введем относительное изменение параметра масштаба $\delta = (\beta_1 - \beta_0)/\beta_0$. Оптимальная решающая статистика y вытекает из отношения правдоподобия. Алгоритм обнаружения увеличения параметра масштаба имеет вид $y \geq y_T$, где порог обнаружения зависит от выбранного критерия. Для байесовского критерия $y_B = \beta_0(1 + \delta)[\ln \Lambda_B + \alpha \ln(1 + \delta)]/\delta$, где Λ_B – байесовский порог (он равен единице для критерия максимального правдоподобия). В случае критерия Неймана – Пирсона порог $y_{NP} = \beta_0 c_F(\alpha)$ включает процентную точку $c_F(\alpha)$ стандартного (с единичным параметром масштаба) гамма-распределения, которая является решением уравнения

$$F = \int_{y_{NP}}^{\infty} f_0(y) dy = (1/\Gamma(\alpha)) \int_{y_{NP}/\beta_0}^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt = \Gamma(\alpha, c_F)/\Gamma(\alpha),$$

содержащего дополнение интеграла вероятности гамма-распределения [4]

$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$, а F есть заданная вероятность ложной тревоги.

В свою очередь $\Gamma(\alpha, x)$ выражается через неполную гамма-функцию

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \text{ которая хорошо табулирована [20, 21].}$$

Некоторые процентные точки стандартного гамма-распределения приведены в табл. 2.7.1.

Таблица 2.7.1

α	0,5	1	2	5	10
$F = 10^{-2}$	3,317	4,605	6,638	11,605	18,783
$F = 10^{-3}$	5,414	6,908	9,233	14,794	22,657
$F = 10^{-4}$	7,568	9,21	11,756	17,782	26,193

Для целых значений параметра формы $\alpha = n + 1$ имеем точное выражение

$$\Gamma(n + 1, x) = \int_x^\infty t^{n-1} \exp(-t) dt = n! \exp(-x) \cdot \sum_{i=0}^n x^i / i!$$

Дефлексия решающей статистики определяется выражением

$$d = (M_1(y) - M_0(y)) / \sigma_0(y) = \delta \sqrt{\alpha},$$

откуда следует, что при $\alpha > 1$ качество обнаружения будет расти по сравнению со случаем экспоненциальных распределений. Вероятность правильного обнаружения вычисляется по формуле

$$D = \int_{y_{NP}}^\infty f_1(y) dy = (1 / \Gamma(\alpha)) \int_{y_{NP} / \beta_1}^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt = \Gamma(\alpha, c_D) / \Gamma(\alpha),$$

где параметр $c_D = c_F \beta_0 / \beta_1 = c_F / (1 + \delta) = c_F / (1 + d / \sqrt{\alpha})$. Приведенные формулы позволяют численно исследовать характеристики обнаружения изменения параметра масштаба гамма-распределения и определить пороговые дефлекции для заданного качества обнаружения.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма к изменению параметров α и β_0 .
2. Рассчитать характеристики обнаружения и пороговые дефлекции при обнаружении изменения параметра масштаба для нескольких значений параметра формы гамма-распределения $\alpha = 0,5; 1; 2; 5; 10$. Сравнить с моделью экспоненциального распределения и семейством распределений Вейбулла с теми же параметрами формы.
3. Предложить возможные алгоритмы различения гамма-распределения с $\alpha \neq 1$ и экспоненциального распределения.
4. Предложить возможные алгоритмы различения гамма-распределения с $\alpha \neq 1$ и логнормального распределения.

3. РАЗЛИЧЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

3.1. Различение экспоненциального и рэлеевского распределений

Рассмотрим следующие гипотезы: $H_E: y \sim E(\beta_E)$, $H_R: y \sim R(\beta_R)$. Существуют две задачи обнаружения в зависимости от вида нулевой гипотезы: задача $(E - R)$, когда нулевая гипотеза $H_0 = H_E$, и задача $(R - E)$, когда $H_0 = H_R$. Решения этих задач, как правило, несимметричны, т. е. не все равно, какая из гипотез нулевая, и различие требует разных значений порогов.

Рассмотрим первую задачу $(E - R)$ и введем отношение сигнал/шум по мощности как относительное изменение мощности $q_1^2 = (P_R - P_E)/P_E$. После перехода к нормированной статистике $z = y/\beta_R$ плотности вероятностей приобретают вид: $f_E(z) = 2Q \exp(-2Qz)$, $f_R(z) = 2z \exp(-z^2)$, где $Q = \beta_R / 2\beta_E$ – параметр, связанный с отношением сигнал/шум по мощности $q_1^2 = 2Q^2 - 1$, отсюда $Q^2 = (q_1^2 + 1)/2$.

Логарифм отношения правдоподобия для задачи $(E - R)$ равен $\ln \Lambda_{R/E} = \ln(z/Q) - (z - Q)^2 + Q^2$. Очевидно, что достаточная статистика включает нелинейные преобразования наблюдений (логарифмическое и квадратичное). Она связана с наблюдением z немонотонной зависимостью. Эта зависимость для $q_1^2 = 1$ показана на рис. 3.1.1, а (линия 1), откуда видно, что гипотеза H_R принимается в случае $y_1 < y < y_2$, где y_1 и y_2 – верхний и нижний пороги.

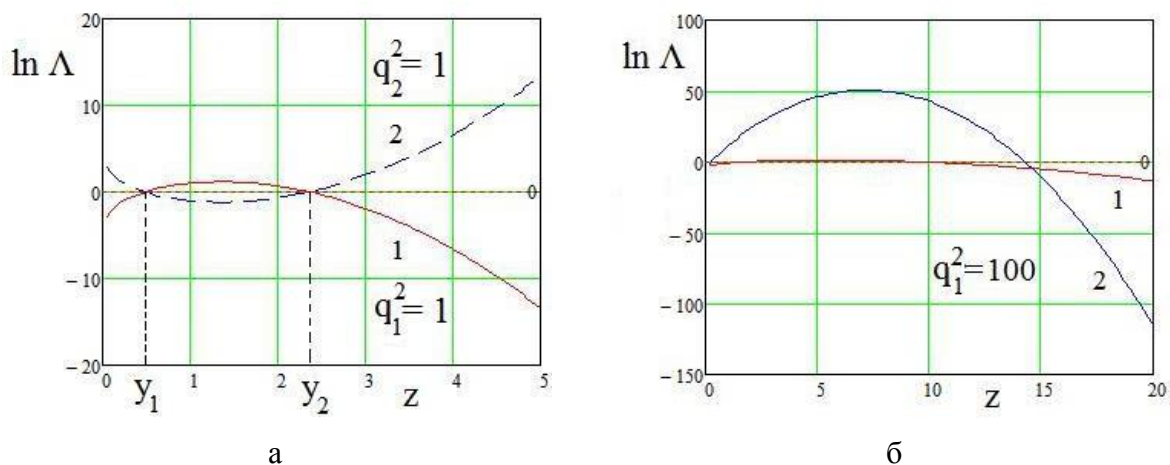


Рис. 3.1.1. Логарифм отношения правдоподобия для задач:
а) $(E - R)$ и б) $(R - E)$

Для байесовского критерия возможен случай, когда линия порога $\ln \Lambda_B$ проходит выше кривой $\ln \Lambda_{R/E}$, и обнаружение невозможно. Однако с увеличением отношения сигнал/шум q_1^2 кривая $\ln \Lambda_{R/E}$ поднимается, область принятия альтернативы расширяется, и задача может иметь решение (разд. 3.2–3.4). На рис. 3.1.1, б приведены линии для случаев $q_1^2 = 1$ (кривая 1) и $q_1^2 = 100$ (кривая 2).

В случае критерия Неймана – Пирсона существует множество пороговых пар $\{y_1, y_2\}$, для которых обеспечивается заданная вероятность ложной тревоги. Среди них имеются граничные пары $\{0, y_2\}$ и $\{y_1, \infty\}$, поэтому оптимальный алгоритм должен использовать те пороговые пары, которые обеспечивают максимальное значение вероятности правильного обнаружения.

Обратная задача различения ($R - E$) также решается на основе двухпороговой обработки, однако в случае $y_1 < y < y_2$ гипотеза H_R отвергается. Логарифм отношения правдоподобия представлен на рис. 3.1.1 слева (пунктирная линия 2). Отношение сигнал/шум по мощности теперь определяется по-другому: $q_2^2 = (P_E - P_R) / P_R = 1/(2Q^2) - 1$, так что параметр $Q^2 = (1/2)(q_2^2 + 1)$ уменьшается с увеличением q_2^2 , а линию $\ln \Lambda_{E/R}$ при достаточно больших q_2^2 можно считать монотонно возрастающей и практически перейти к однопороговому алгоритму различения $y \geq y_2$. Ясно, что пары порогов по критерию Неймана – Пирсона будут отличаться от первого случая, так как определяются из другого распределения вероятностей. При больших q_2^2 можно также перейти к единственному порогу по рэлеевскому распределению (см. задачу ($R - R$)).

Различение ($R - E$) можно сравнить с задачей ($R - R$). Пороги по критерию Неймана – Пирсона будут одинаковы, но изменение распределения с рэлеевского на экспоненциальное при альтернативе приводит к потерям в отношении сигнал/шум. Эти потери нетрудно оценить, если выбрать уровень 0,5 для вероятности правильного обнаружения.

Приравнивая порог Неймана – Пирсона (для рэлеевского распределения) $y_{NP} = \beta_R (a / \lg e)^{1/2}$ медиане экспоненциального распределения $\text{med}_E = \beta_E \ln 2$, получаем пороговое значение отношения $Q_{0,5}^2 = (\ln 2)^2 \lg e / 4a$ для уровня $D = 0,5$. Здесь $a = -\lg F$ – индекс вероятности ложной тревоги, а индекс вероятности правильного различения $b = -\lg D = 0,301$. Подставляя это пороговое значение в формулу $q_{0,5}^2 = 1/(2Q_{0,5}^2) - 1$ для отношения сигнал/шум по мощности, получаем для уровня вероятности правильного различения $D = 0,5$ окончательное выражение $q_{0,5}^2 = kb - 1$, которое можно сравнить с пороговым отношением по мощности для задачи ($R - R$).

В данном случае коэффициент $\kappa = 2 \cdot 0,301 / (\ln 2)^2 \lg e \approx 2,885$ отражает потери в пороговом отношении по сравнению с задачей $(R - R)$, где $\kappa = 1$. Эти потери не зависят от вероятности ложной тревоги и составляют примерно 4,6 дБ. Если рассмотреть более высокие уровни вероятности правильного различения, то потери могут быть существенно больше. Однако они всегда меньше, чем для задачи $(E - E)$.

Характеристики обнаружения-различения для задачи $(R - E)$ при выбранном пороге y_{NP} рассчитываются по формуле $D = \exp(-y_{NP} / \beta_E)$. Они приведены на рис. 3.1.2 (линии 3) и занимают промежуточное положение между задачами $(R - R)$ (линии 1) и $(E - E)$ (линии 2), рис. 2.4.1. Сплошные линии соответствуют вероятности ложной тревоги $F = 10^{-2}$, а штриховые – $F = 10^{-3}$.

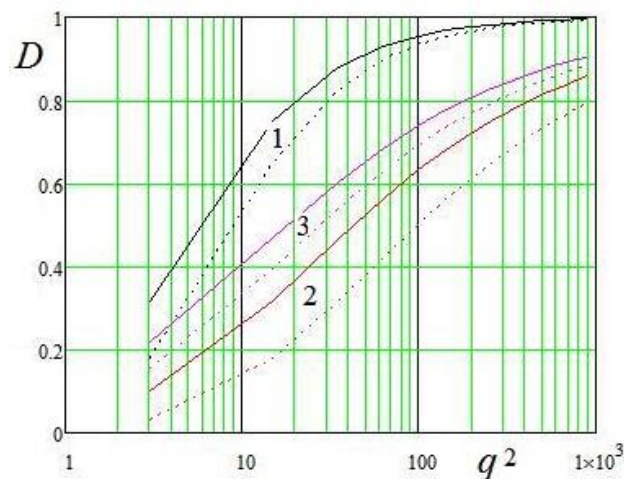


Рис. 3.1.2. Характеристики обнаружения-различения распределений

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма различения к изменению параметров распределений. Определить существенные относительные отклонения параметров.

2. Рассмотреть случай различения при одинаковых мощностях распределений.

3.2. Различение рэлеевского и логнормального распределений

Рассмотрим следующие гипотезы: $H_R: y \sim R(\beta_R)$ и $H_{LN}: y \sim LN(y_{med}, k_v)$, где $LN(y_{med}, k_v)$ обозначает плотность вероятности $f(y) = (y\sigma_l\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(\ln(y/y_{med}))^2 / 2\sigma_l^2)$ логнормального распределения.

Логарифм отношения правдоподобия имеет вид

$$\ln \Lambda_{LN/R} = Q_R - (z - m_z)^2 / 2\sigma_l^2 + \exp(2z) / \beta_R^2,$$

где $z = \ln y$ — решаящая статистика, а $m_z = \ln y_{\text{med}} - 2\sigma_l^2$ и $Q_R = 2(\sigma_l^2 - \ln y_{\text{med}}) - \ln(2\sigma_l \sqrt{2\pi} / \beta_R^2)$ являются постоянными, зависящими от параметров распределений. Итак, логарифм отношения правдоподобия зависит от решаящей статистики $z = \ln y$, но зависимость эта не всегда монотонная, поэтому решающее правило в общем случае не будет однопороговым.

Рассмотрим вариант задачи $(R - LN)$, т. е. проверим нулевую гипотезу $H_0 = H_R$, в то время как $H_1 = H_{LN}$. В качестве параметра различения выберем отношение сигнал/шум по мощности

$$q^2 = (P_{LN} - P_R) / P_R = y_{\text{med}}^2 (1 + k_v^2)^2 / \beta_R^2 - 1.$$

Тогда при $q^2 > 1$ логарифм отношения правдоподобия будет монотонно возрастающей функцией от z , а следовательно, и от y , что показывают графики на рис. 3.2.1 для $\beta_R = 1$, $\sigma_l^2 = 0,5$, $k_v^2 = 0,649$ и двух значений медианы $y_{\text{med}1} = 0,7$ и $y_{\text{med}2} = 3,4$. Это соответствует двум значениям отношения сигнал/шум $q_1^2 = 0,33$ (линия 1) и $q_2^2 = 30$ (линия 2).

При малых отношениях сигнал/шум оптимальный алгоритм различения будет в общем случае двухпороговым. Для больших отношений сигнал/шум и малых вероятностей ложной тревоги можно не учитывать вероятности появления малых положительных, а также отрицательных значений статистики $z = \ln y$, тогда достаточно одного порога, и алгоритм принимает решение в пользу H_{LN} , если $z \geq z_T$.

Рассмотрим случай однопорогового алгоритма при больших отношениях сигнал/шум для критерия Неймана – Пирсона. Вертикальными линиями на графике рис. 3.2.1 отмечены пороги z_{NP} , обеспечивающие вероятности ложной тревоги $F_0 = 10^{-2}, 10^{-3}$.

Поскольку при гипотезе H_{LN} величина $z = \ln y$ распределена нормально, можно ввести эквивалентный порог $z_{NP} = \ln y_{NP}$ и рассчитать вероятность правильного различения как $D = P\{z \geq z_{NP} | H_{LN}\}$.

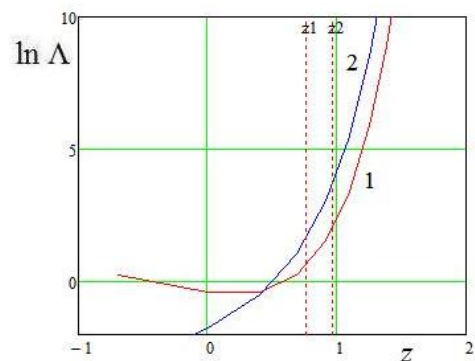


Рис. 3.2.1. Логарифм отношения правдоподобия для задачи $(R - LN)$

В предположении большого отношения сигнал/шум можно считать, что $\mu_l \gg \mu_0$, где μ_0 – математическое ожидание статистики $z = \ln y$ при гипотезе H_R . Тогда вероятность правильного обнаружения (различения логнормального распределения на фоне рэлеевского) определится по формуле

$$D = \Phi[(\mu_l - z_{NP})/\sigma_l] = \Phi[(1/\sigma_l)\ln(y_{\text{med}}/y_{NP})].$$

При $y_{NP} = y_{\text{med}}$ достигается уровень $D = 0,5$ для вероятности правильного различения. Отсюда следует, что пороговое отношение сигнал/шум $q_{0,5}^2 = \kappa_{LN/R}\mu - 1$, где $\kappa_{LN/R} = 0,301 \cdot \rho^4 / \lg e$ – коэффициент, отражающий потери (или выигрыш) по сравнению с задачей $(R - R)$. Потери начинаются со значений $\rho > 1,096$, т. е. при $\sigma_l > 0,428$, или $\sigma_l^2 > 0,183$, а при меньших значениях σ_l имеет место выигрыш в пороговом отношении сигнал/шум на указанном уровне.

Для варианта задачи $H_0 : y \sim LN(y_{\text{med}}, k_v)$, $H_1 : y \sim R(\beta_R)$ логарифм отношения правдоподобия изображен на рис. 3.2.2 как функция от $z = \ln y$ (для $\beta_{R1} = 10$ и $\beta_{R2} = 50$, что соответствует $q_1^2 = 36$ и $q_1^2 = 919$).

Соответствующие линии имеют номера 1 и 2. Возможность использования однопорогового различения в случае больших отношений сигнал/шум возникает, если пренебречь малыми вероятностями появления очень больших выбросов (такие выбросы свидетельствуют в пользу логнормального шума).

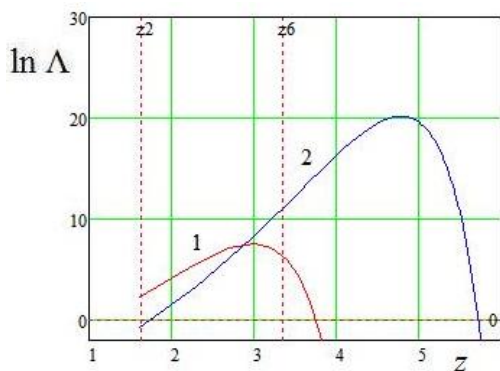


Рис. 3.2.2. Логарифм отношения правдоподобия для задачи $(LN - R)$

Вертикальными линиями на рис. 3.2.2 помечены пороги для вероятностей ложной тревоги 10^{-2} и 10^{-6} . Для расчета этих порогов следует использовать то, что после логарифмического преобразования решающая статистика $z = \ln y$ при гипотезе H_0 распределена нормально, так что эквивалентный порог $z_{NP} = \ln y_{\text{med}} + c_F \sigma_l$ (см. задачу $(N - N)$). После возвращения к наблюдению y порог будет равен $y_{NP} = y_{\text{med}} \exp(c_F \sigma_l)$.

Характеристики обнаружения-различения определяются формулой $D = \exp(-y_{NP}^2/\beta_R^2)$, что при подстановке порога и $\beta_R^2 = y_{\text{med}}^2 \rho^4 (1 + q^2)$ приводит к выражению

$$D = \exp(-\exp(2c_F \sigma_l)/\rho^4 (1 + q^2)).$$

Отсюда следует, что пороговое отношение сигнал/шум (по мощности) равно $q_{D,F}^2 = \kappa_{R/LN}\mu - 1$, где коэффициент $\kappa_{R/LN} = (\lg e) \exp(2c_F\sigma_l)/\rho^4 a$ существенно больше единицы в практически важном диапазоне изменений $a = 2, \dots, 10$.

Это означает, что в большинстве случаев имеют место потери в пороговом отношении сигнал/шум по сравнению с задачей $(R - R)$, т. е. логнормальный шум хуже, чем рэлеевский для одного и того же рэлеевского сигнала.

Полученный результат иллюстрирует рис. 3.2.3, где кривые $10 \lg \kappa_{R/LN}$ построены (в децибелах) для значений $\rho = 1,065; 1,2; 1,8; 2$. Из него следует, что если, например, логнормальное распределение имеет отношение математического ожидания к медиане $\rho = 1,065$ (совпадающее с таким же отношением для распределения Рэля), то потери в пороговом отношении сигнал/шум не превышают 2 дБ (при $a < 3$ имеется даже незначительный выигрыш). С увеличением ρ до значения $\rho = 2$ максимальные потери возрастают до 25 дБ.

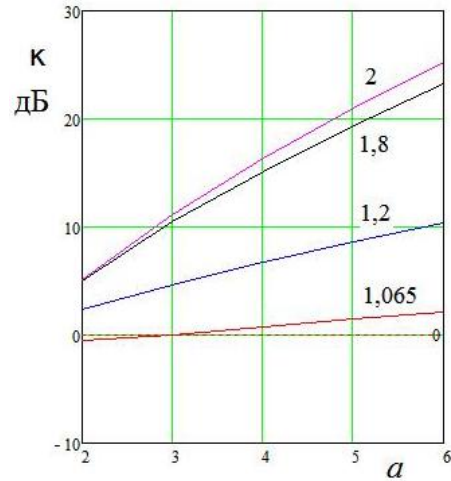


Рис. 3.2.3. Коэффициент потерь для задачи $(LN - R)$

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма различения к изменению параметров распределений. Определить существенные относительные отклонения параметров.
2. Исследовать случай различения при одинаковых мощностях распределений.

3.3. Различение экспоненциального и логнормального распределений

В задаче $(E - LN)$ проверяется гипотеза $H_E: y \sim E(\beta_E)$ против $H_{LN}: y \sim LN(y_{\text{med}}, k_v)$. Логарифм отношения правдоподобия равен $\ln \Lambda_{LN/E} = Q_E - (z - m_z)^2 / 2\sigma_l^2 + \exp(z)/\beta_E$, где решающая статистика $z = \ln y$, $m_z = \ln y_{\text{med}} - \sigma_l^2$, $Q_E = (\sigma_l^2/2 - \ln y_{\text{med}}) - \ln(\sigma_l \sqrt{2\pi}/\beta_E)$.

Отношение сигнал/шум по мощности есть

$$q^2 = (P_{LN} - P_E)/P_E = y_{\text{med}}^2 (1 + k_v^2)^2 / 2\beta_E^2 - 1.$$

График функции логарифма отношения правдоподобия приведен на рис. 3.3.1, а, для $\beta_E = 1$, $\sigma_l^2 = 0,5$ и двух значений медианы $y_{\text{med}1} = 0,9$ и $y_{\text{med}2} = 4,5$. Это соответствует двум значениям отношения сигнал/шум $q_1^2 = 0,1$ (линия 1) и $q_2^2 = 26,5$ (линия 2). Вертикальные линии показывают пороги Неймана – Пирсона для вероятностей ложной тревоги $F_0 = 10^{-2}$, 10^{-6} . Очевидно, что при малых вероятностях ложной тревоги и больших отношениях сигнал/шум достаточно использовать один порог различения.

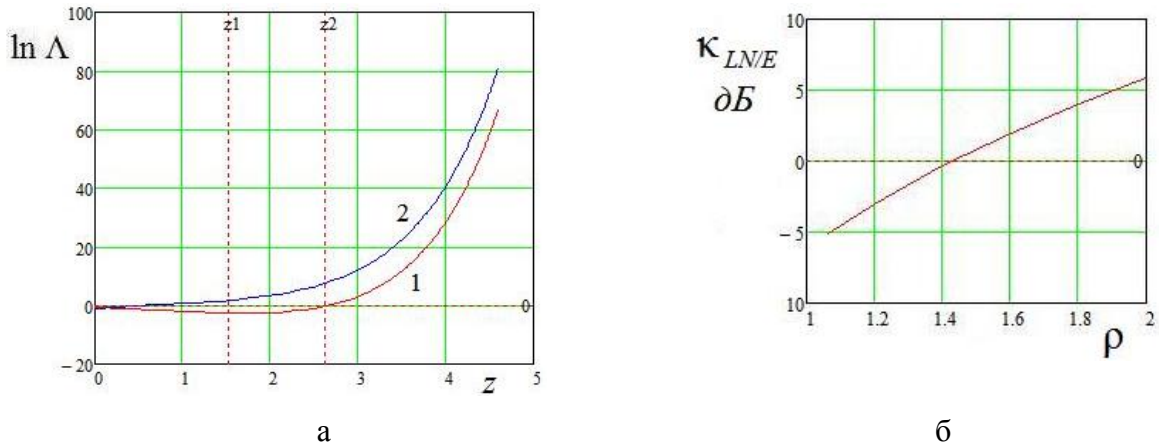


Рис. 3.3.1. Логарифм отношения правдоподобия для задачи $(E - LN)$ (а) и коэффициент $\kappa_{LN/E}$ (б)

Пороговое отношение сигнал/шум для уровня $D = 0,5$ вычисляется по формуле $q_{0,5}^2 = \kappa_{LN/E} \cdot \mu^2 - 1$, где $\mu = a/b$, а коэффициент $\kappa_{LN/E} = \rho^4 (0,301)^2 / 2 \cdot (0,4343)^2 = 0,24 \cdot \rho^4$ не зависит от вероятности ложной тревоги, но зависит от параметра формы логнормального распределения (рис. 3.3.1, б). Потери в отношении сигнал/шум по сравнению с задачей $(E - E)$ начинаются примерно с значений $\rho = 1,43$ (или с $\sigma_l^2 = 0,67$, $k_v = 0,98$). Именно такое значение $\rho = 1,43$ имеет экспоненциальное распределение. До этих значений указанных параметров имеется некоторый выигрыш, который для $\rho = 1,065$ (это значение имеет рэлеевское распределение) составляет примерно 5 дБ.

Для обратной задачи $(LN - E)$, т. е. $H_0: y \sim LN(y_{\text{med}}, k_v)$, $H_1: y \sim E(\beta_1)$ логарифм отношения правдоподобия имеет вид, показанный на рис. 3.3.2, а, для $y_{\text{med}} = 1$, $\sigma_l^2 = 0,5$, $\beta_1 = 2$ и $\beta_2 = 20$, что соответствует $q_1^2 = 1,943$ (линия 1) и $q_2^2 = 293$ (линия 2). Отсюда следует, что оптимальный алгоритм различения будет в общем случае двухпороговым. Однопороговой структурой можно пользоваться лишь при очень больших отношениях сигнал/шум. На рис. 3.3.2 вертикальными линиями отмечены процентные точки для $F = 10^{-2}$, 10^{-6} .

Пороговое отношение сигнал/шум в задаче $(LN - E)$ равно $q_{D,F}^2 = \kappa_{E/LN} \mu^2 - 1$, где $\kappa_{E/LN} = (\lg e)^2 2 \exp(2c_F \sigma_l) / \rho^4 a^2$ – коэффициент, характеризующий отличия от задачи $(E - E)$.

Этот коэффициент представлен на рис. 3.3.2, б, в децибелах для разных значений $\rho = 1,065; 1,2; 1,842$. Из него следует, что при малых значениях ρ имеет место выигрыш в пороговых отношениях сигнал/шум, который несколько растет с уменьшением вероятности ложной тревоги. Этот эффект связан с концентрацией логарифмического нормального распределения при малых ρ по сравнению с экспоненциальным.

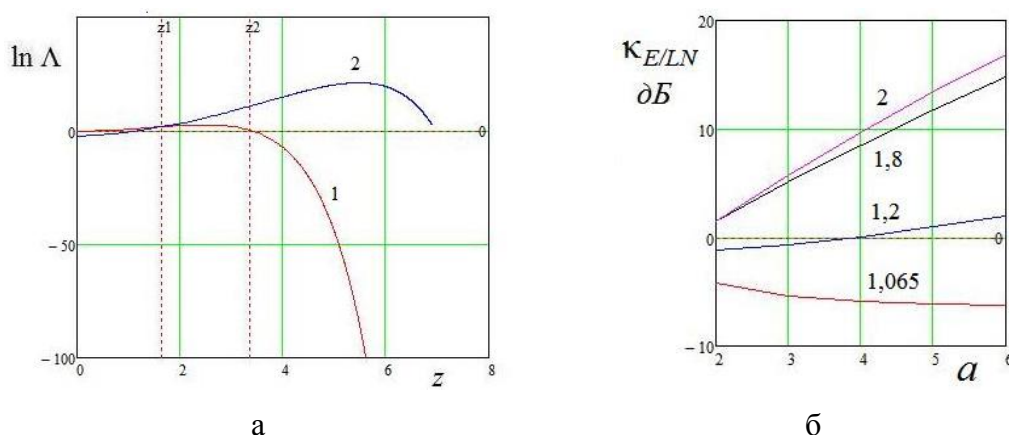


Рис. 3.3.2. Логарифм отношения правдоподобия для задачи $(LN - E)$ (а) и коэффициент $\kappa_{E/LN}$ (б)

На рис. 3.3.3 приведено сравнение пороговых отношений сигнал/шум по мощности $q_{D,F}^2 = 2\beta_E^2 / (y_{\text{med}}^2 \rho^4) - 1$ для задачи $(LN - E)$ (сплошные линии) и $q_{D,F}^2 = \beta_R^2 / (y_{\text{med}}^2 \rho^4) - 1$ для задачи $(LN - R)$ (штриховые линии) для $\rho = 1, 2$. Линии 1 соответствуют вероятности ложной тревоги $F = 10^{-2}$, линии 2 – $F = 10^{-6}$. Пороговый уровень определяется формулой $y_{NP} = y_{\text{med}} \exp(c_F \sigma_l)$. Вероятности правильного обнаружения для заданного порога вычислялись в задачах $(E - E)$ и $(R - R)$.

По оси абсцисс отложен параметр «качества» обнаружения $\mu = -\lg F / -\lg D = a/b$. Различение экспоненциального распределения на фоне логнормального требует существенно больших значений пороговых отношений сигнал/шум, чем различение рэлеевского распределения на том же фоне, причем разница растет с увеличением μ (с увеличением требуемых значений вероятности правильного обнаружения D).

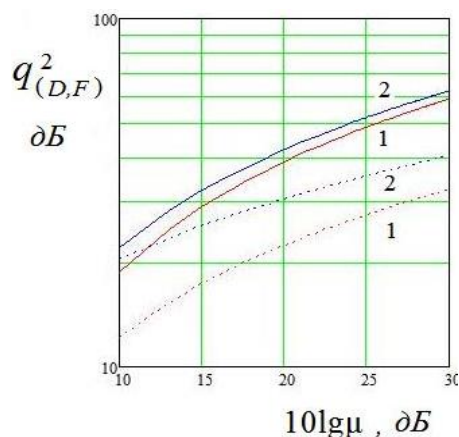


Рис. 3.3.3. Пороговые отношения сигнал/шум для задач $(LN - E)$ и $(LN - R)$ при $\rho = 1,2$

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма различения к изменению параметров распределений. Определить существенные относительные отклонения параметров.

2. Исследовать случай различения при одинаковых мощностях распределений.

3.4. Различение распределений Вейбулла

Рассмотрим общую задачу различения по наблюдению y двух распределений Вейбулла ($WB(\gamma_0, \beta_0) - WB(\gamma_1, \beta_1)$), в которой плотность вероятности имеет вид $f(y) = (\gamma / \beta)(y / \beta)^{\gamma-1} \exp(-(y / \beta)^\gamma)$, где $\beta > 0$ – параметр масштаба, $\gamma > 0$ – параметр формы. Рэлеевское распределение $R(\beta)$ получается в случае $\gamma = 2$, а при $\gamma = 1$ имеем экспоненциальное распределение $E(\beta)$. С увеличением параметра формы γ коэффициент вариации падает, т.е. распределение концентрируется около математического ожидания. При неизменном и известном параметре формы $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$ задача различения параметров масштаба $H_0 : \beta = \beta_0$ против $H_1 : \beta = \beta_1$ сводится к задаче ($E - E$) после нелинейного преобразования $z = y^\gamma$.

Более сложной является задача различения двух распределений, отличающихся параметром формы. Частные случаи ($E - R$) и ($R - E$) были уже рассмотрены. Рассмотрим задачу ($WB - E$) проверки $H_0 : y \sim WB(\gamma, \beta_0)$ против $H_1 : y \sim E(\beta_E)$. Эта задача включает уже рассмотренные случаи ($E - E$) и ($R - E$). Нетрудно показать, что в общем случае непосредственное наблюдение y не является достаточной статистикой. Ситуация, когда гипотезы в достаточной степени «расходятся», возникает при больших отношениях сигнал/шум $q^2 = (P_1 - P_0) / P_0$, где мощности случайных величин равны $P_0 = \beta_0^2 \cdot \Gamma(1 + 2 / \gamma)$, $P_1 = 2\beta_E^2$. При этом алгоритм $y \geq y_T$ вполне работоспособен, а порог y_T для критерия Неймана – Пирсона равен $y_{NP} = \beta_0(a / \lg e)^{1/\gamma}$, где $a = -\lg F$, а γ – известный параметр формы при гипотезе H_0 .

Учитывая то, что требуемое значение параметра масштаба β_E , обеспечивающее заданную вероятность $D = 10^{-b}$ превышения порога y_{NP} , есть $\beta_E = y_{NP}(\lg e) / b$, можно получить выражение для порогового отношения сигнал/шум по мощности $q_{D,F}^2 = \kappa_{E/WB} \mu^2 - 1$, где коэффициент потерь (или выигрыша) по сравнению с задачей ($E - E$) определяется выражением

$\kappa_{E/WB} = 2(a / \lg e)^{2/\gamma-2} / \Gamma(1 + 2 / \gamma)$. Величина $\mu = a/b$ по-прежнему есть отношение индексов вероятностей $F = 10^{-a}$ и $D = 10^{-b}$. Аналогичным образом для задачи $(WB - R)$ получаем $q_{D,F}^2 = \kappa_{R/WB}\mu - 1$, где $\kappa_{R/WB} = (a / \lg e)^{2/\gamma-1} / \Gamma(1 + 2 / \gamma)$.

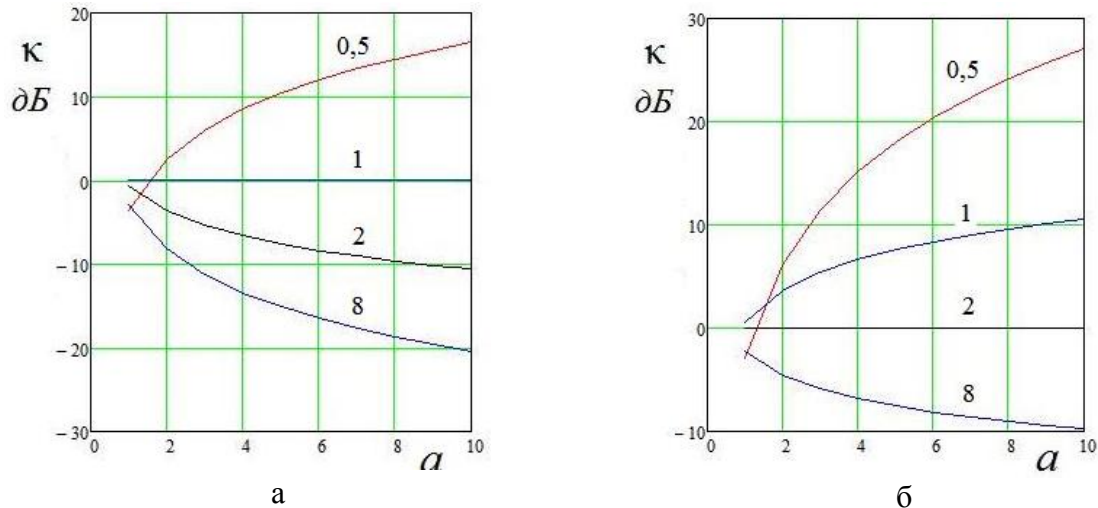


Рис. 3.4.1. Коэффициенты потерь (выигрыша):
а) для задачи $(WB - E)$; б) для задачи $(WB - R)$

На рис. 3.4.1 представлены зависимости величин $10 \lg \kappa$ для соответствующих задач от $a = -\lg F$ при различных значениях γ . В первом случае $(WB - E)$ при $\gamma = 1$ потери отсутствуют, так как получается задача $(E - E)$, случай $\gamma < 1$ характеризуется потерями, возрастающими с увеличением a , причем $\gamma = 2$ соответствует задаче $(R - E)$ различения рэлеевского и экспоненциального распределений, а при $\gamma > 1$ имеет место выигрыш, растущий с увеличением a , т. е. с уменьшением вероятности ложной тревоги.

Во втором случае $(WB - R)$ потери отсутствуют при $\gamma = 2$, случай $\gamma < 2$ характеризуется потерями, также возрастающими с увеличением a , причем $\gamma = 1$ соответствует задаче $(E - R)$ различения экспоненциального и рэлеевского распределений, а выигрыш наступает при $\gamma > 2$.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма различения к изменению параметров распределений. Определить существенные относительные отклонения параметров.

2. Исследовать случай различения при одинаковых мощностях распределений.

3.5. Различение гамма-распределений

Плотность вероятности гамма-распределения дается выражением

$$f(y) = (1/\beta\Gamma(\alpha))(y/\beta)^{\alpha-1} \exp(-y/\beta),$$

где $\beta > 0$ – параметр масштаба, $\alpha > 0$ – параметр формы, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

При $\alpha = 1$ распределение переходит в экспоненциальное $E(\beta)$, которое является общим для семейств гамма-распределений и распределений Вейбулла. С увеличением параметра формы α коэффициент вариации $k_v = 1/\sqrt{\alpha}$ уменьшается, т.е. плотности гамма-распределения, так же как в случае семейства Вейбулла, все больше концентрируются около математических ожиданий. Однако при этом увеличиваются как математическое ожидание $m = \alpha\beta$, так и дисперсия $\sigma^2 = \alpha\beta^2$. Мощность (второй начальный момент) случайной величины с гамма-распределением равна $m_2 = P = \alpha \cdot (\alpha + 1)\beta^2$.

Решение общей задачи различения ($G(\alpha_0, \beta_0) - G(\alpha_1, \beta_1)$) включает совместное использование двух статистик y и $z = \ln y$ для формирования логарифма отношения правдоподобия. Однако в широких пределах изменения параметров и даже при небольших отношениях сигнал/шум логарифм отношения правдоподобия оказывается монотонным по наблюдению y (рис. 3.5.1). Это значит, что наблюдение y часто можно использовать в качестве решающей статистики.

На рис. 3.5.1 представлены результаты расчетов для задачи различения по параметру формы: $H_0 : \alpha = \alpha_0$, $H_1 : \alpha = \alpha_1$ при начальных значениях $\alpha_0 = 0,5; 1; 2; 8$ (линии 1–4) и при постоянном относительном изменении параметра $\delta\alpha = 2$, где $\delta\alpha = (\alpha_1 - \alpha_0)/\alpha_0$, так что $\alpha_1 = 1,5; 3; 6; 24$. При этом масштаб сохранялся неизменным: $\beta_0 = \beta_1 = 1$. Отношения сигнал/шум по мощности равны соответственно $q^2 = 4; 5; 6; 7,33$.

Рассмотрим задачу различения при экспоненциальной альтернативе, т.е. задачу ($G(\alpha_0, \beta_0) - E(\beta_1)$) при условии большого отношения сигнал/шум. Алгоритм обнаружения имеет вид $y \geq y_{NP}$, где порог по критерию Неймана – Пирсона вычисляется через процентную точку стандартного гамма-распределения $G(x; \alpha) = x^{\alpha-1} \exp(-x) / \Gamma(\alpha)$. Значения порогов представлены на рис. 3.5.2 в функции от параметра формы для трех значений вероятностей $F = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ (сплошные линии 1–3). Пунктирные линии показывают значения порогов для стандартного распределения Вейбулла. Эти пороги совпадают для этих двух распределений только в точках $\alpha = \gamma = 1$, которые соответствуют экспоненциальному распределению.

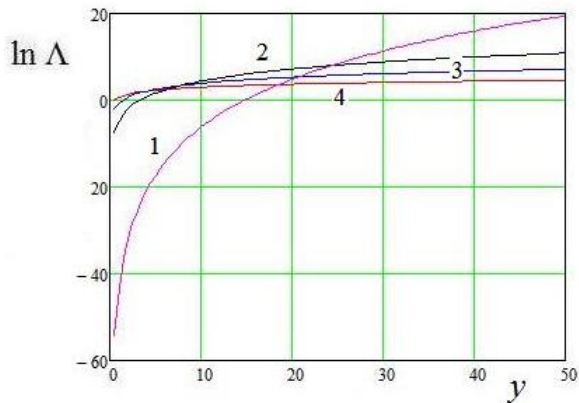


Рис. 3.5.1. Логарифм отношения правдоподобия для задачи $(G(\alpha_0, \beta) - G(\alpha_1, \beta))$

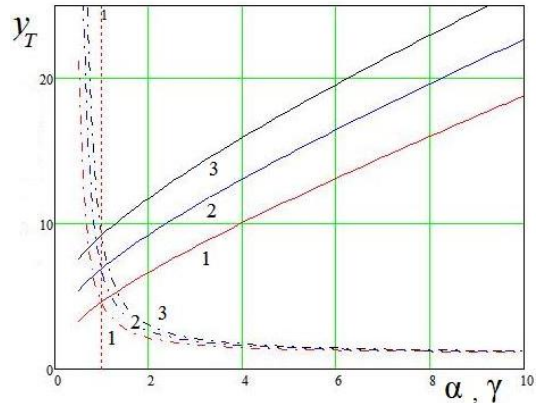


Рис. 3.5.2. Пороговые значения для гамма-распределения

В отличие от семейства Вейбулла пороговые значения для гамма-распределений растут с увеличением параметра формы α , что связано с увеличением математического ожидания этого распределения пропорционально значениям α .

Характеристики обнаружения построены на рис. 3.5.3 для значений $\beta_0 = 1$, $\alpha = 0,5; 1; 2; 4$ (линии 1–4), а значения β_1 определяются по заданному отношению сигнал/шум из соотношения $2\beta_1^2 = P_1 = P_0(1 + q^2)$. Пороговые отношения сигнал/шум по мощности для задачи $(G(\alpha_0, \beta_0) - E(\beta_1))$ вычислены и приведены на рис. 3.5.4 для уровня $D = 0,5$ и вероятностей ложной тревоги $F = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ (сплошные линии 1–3 соответственно). Пунктиром приведены пороговые значения для задачи $(WB(\gamma, \beta_0) - E(\beta_1))$ при тех же уровнях вероятностей. Соответствующие кривые имеют общие точки для $\alpha = \beta = 1$.

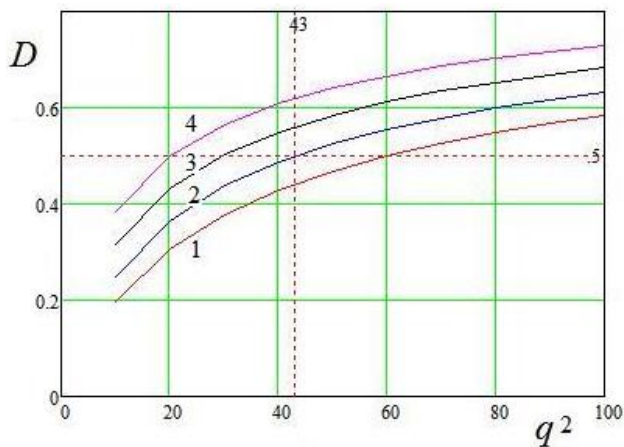


Рис. 3.5.3. Характеристики обнаружения для задач $(G(\alpha_0, \beta_0) - E(\beta_1))$

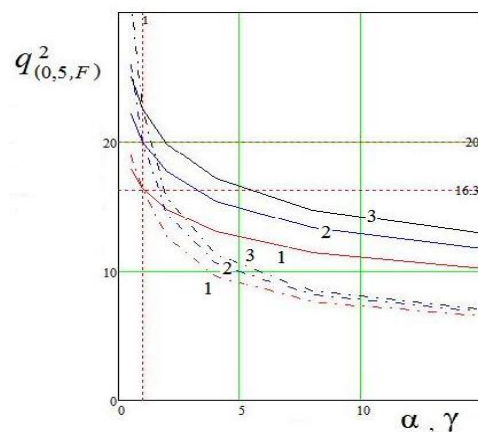


Рис. 3.5.4. Пороговые отношения сигнал/шум для задач $(G(\alpha_0, \beta_0) - E(\beta_1))$ и $(WB(\gamma, \beta_0) - E(\beta_1))$

Для других значений параметров формы, больших единицы, шумовое распределение Вейбулла вносит меньшие потери по сравнению с гамма-распределением. Но при параметрах формы, меньших единицы, ситуация меняется на обратную.

Задания

1. Исследовать чувствительность алгоритма различения к изменению параметров распределений. Определить существенные относительные отклонения параметров.

2. Исследовать случай различения при одинаковых мощностях распределений.

4. ОБРАБОТКА МНОГОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Во многих практически важных случаях наблюдения после предварительной обработки представляют выборку $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$, где «Т» означает транспонирование. Статистические связи между выборочными значениями описываются смешанными корреляционными моментами различных порядков. При совместно гауссовском распределении выборок достаточно учитывать только обычные корреляции второго порядка, при этом из некоррелированности следует независимость выборок. Предположение о некоррелированности наблюдений имеет достаточное обоснование, если интервал временной дискретизации превышает время корреляции входного процесса. Слабо коррелированными и практически взаимно независимыми оказываются спектральные отсчеты, т. е. отображения в частотную область с помощью преобразования Фурье.

Независимость выборочных значений позволяет представить многомерный функционал вероятности в виде произведения одномерных плотностей $f(y) = f(y_1) \cdot f(y_2) \cdots f(y_N)$. Логарифм отношения правдоподобия представляется в виде суммы парциальных слагаемых. Таким образом, оптимальная обработка включает *накопление* результатов некоторого преобразования (в общем случае нелинейного) выборочных значений.

4.1. Случай независимой гауссовской выборки

Обнаружение сдвига гауссовского распределения

При обнаружении сдвига гауссовского распределения

$$H_0: y_k \sim N(m_0, \sigma_0^2), \quad H_1^{(1)}: y_k \sim N(m_1, \sigma_0^2), \quad k = 1, \dots, N, \quad m_1 = m_0 + \Delta,$$

сумма выборочных значений $z_1 = \sum_{k=1}^N y_k$ является достаточной статистикой. Из алгоритма $\ln \Lambda(s, y) \geq \ln \Lambda_T$ следует (при положительном сдвиге $m_1 > m_0$, $\Delta > 0$), что решение в пользу H_1 принимается при $z_1 \geq z_T$, где $z_T = \sigma_0^2 \ln \Lambda_T / \Delta + N(m_1 + m_0) / 2$.

Знак сдвига Δ является существенным параметром, и при обнаружении уменьшения математического ожидания ($\Delta < 0$) знак неравенства меняется: $z_1 \leq z_T$. Любая монотонная функция от z также будет достаточной статистикой, например, выборочное среднее $\bar{y} = \sum_{k=1}^N y_k / N$ или центрированная и нормированная статистика $u = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0) / \sqrt{N} \sigma_0$, которая для гипотезы H_0 имеет стандартное нормальное распределение $u \sim N(0, 1)$, а

при $H_1^{(1)}$ – нормальное распределение $u \sim N(d_N, 1)$, со сдвигом на $d_N = \sqrt{N}\Delta / \sigma_0$, где d_N есть дефлексия решающей статистики, которая представляет собой отношение сигнал/шум (по напряжению) на входе решающего устройства. Характеристики обнаружения алгоритма $u \geq u_T$ полностью идентичны одномерному случаю (раздел 2), с заменой параметра $d = \Delta / \sigma_0$ на $d_N = \sqrt{N}\Delta / \sigma_0$. Байесовский порог $u_B = \ln \Lambda_B / d_N + d_N / 2$ зависит от d_N почти линейно только при больших значениях d_N . При малых значениях d_N порог меняет свое поведение в зависимости от значения Λ_B [18]: при $\ln \Lambda_B > 0$ и малом положительном $d_N \rightarrow 0$ порог стремится к $+\infty$, а при $\ln \Lambda_B < 0$ и малом положительном $d_N \rightarrow 0$ порог стремится к $-\infty$.

Обнаружение изменения дисперсии гауссовского распределения

При обнаружении увеличения дисперсии $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ гауссовского распределения в отсутствие сдвига $H_0: y_k \sim N(m_0, \sigma_0^2)$, $H_1^{(2)}: y_k \sim N(m_0, \sigma_1^2)$, $k = 1, \dots, N$, $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1 + \gamma)$, $\gamma = (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) / \sigma_0^2$, $\gamma \geq -1$, квадратичная достаточная статистика $z_2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2$ сравнивается с порогом z_T .

Можно использовать и другие монотонные статистики, например выборочную дисперсию $s_0^2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2 / N$, а также статистику $u_2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2 / \sigma_0^2$, которая при H_0 имеет центральное распределение χ_N^2 с N степенями свободы. Для нее можно вычислить порог по критерию Неймана – Пирсона как соответствующую процентную точку $c_F(N)$ этого распределения.

Введем характеристическую функцию для каждой центрированной величины $(y_k - m_0)^2$ в виде $\psi(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\nu\sigma_0^2\xi^2) \varphi(\xi) d\xi$, где $\xi = (y_k - m_0) / \sigma_0$ – стандартная нормальная случайная величина с плотностью $\varphi(\xi) = \exp(-\xi^2 / 2) / \sqrt{2\pi}$. Тогда получаем $\psi(j\nu) = (1 - j2\sigma_0^2)^{-1/2}$.

Для суммы независимых случайных величин $z_2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2$ характеристическая функция при H_0 будет произведением частных характеристических функций, т. е. $\Psi(j\nu) = (1 - j\nu 2\sigma_0^2)^{-N/2}$. Соответствующее распределение есть гамма-распределение $G(\alpha, \beta_0)$ с плотностью вероятности $w_0(z) = (z / \beta_0)^{\alpha-1} \exp(-z / \beta_0) / \Gamma(\alpha)$, где параметры равны $\alpha = N / 2$ и $\beta_0 = 2\sigma_0^2$.

Для гипотезы $H_1^{(2)}$ дисперсия равна $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1 + \gamma)$, где относительное изменение дисперсии $\gamma = (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) / \sigma_0^2$ является параметром обнаружения, тогда распределение статистики $z_2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2$ будет гамма-распределением $w_1(z) = G(\alpha, \beta_1)$ с масштабом $\beta_1 = \beta_0(1 + \gamma)$.

Задача сводится к обнаружению изменения масштаба случайной величины с гамма-распределением. В случае $N = 2$ параметр $\alpha = 1$, тогда имеем задачу $(E(\beta_0) - E(\beta_1))$ для экспоненциального распределения. В случае четного числа слагаемых, когда число $M = N / 2$ – целое, можно использовать полезную формулу для вероятности превышения порога η величиной $u_2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2 / \sigma_0^2$ [5]:

$$P(u_2 \geq \eta) = 1 - \int_0^\eta x^{M-1} \exp(-x) dx / M! = \exp(-\eta) \cdot \sum_{k=0}^{M-1} \eta^k / k!$$

Алгоритм обнаружения *увеличения* дисперсии ($\gamma > 0$) имеет вид $u_2 \geq U_2$, где $u_2 = N s_0^2 / \sigma_0^2 = \sum_{k=1}^N (y_k - m_0)^2 / \sigma_0^2$, а порог включает указанные параметры и зависит от выбранного критерия оптимальности.

Статистика u_2 имеет при H_0 центральное χ^2 -распределение с N степенями свободы, поэтому порог U_2 представляет собой соответствующую процентную точку этого распределения. При гипотезе $H_1^{(2)}$ центральное χ^2 -распределение с N степенями свободы будет иметь статистика $u_2 / (1 + \gamma)$.

Характеристика обнаружения изменения дисперсии в зависимости от γ представлена на рис. 4.1.1 сплошной линией для $F = 10^{-2}$, $N = 10$.

Пороговые значения $\gamma^{(D,F)}$ для $F = 10^{-2}$ и различных N приведены в табл. 4.1.1.

Таблица 4.1.1

N	1	2	5	10	20	50	100
$\gamma^{(0,5)}$	13,576	5,642	2,466	1,484	0,943	0,5435	0,367
$\gamma^{(0,9)}$	418	42,6	8,354	3,765	2,019	1,02	0,649

Дефлексия статистики u_2 равна $\gamma \sqrt{N/2}$, однако часто в качестве параметра обнаружения используется величина $N\gamma$, которая определена в [5] как «сила сигнала». В этом случае пороговые значения $N\gamma^{(D,F)}$ оказываются зависящими от N , как показано на рис. 4.1.2 для $F = 10^{-2}$, где нижняя линия соответствует уровню $D = 0,5$, а верхняя – уровню $D = 0,9$.

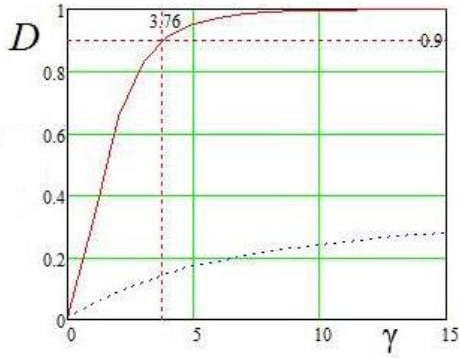


Рис. 4.1.1. Характеристики обнаружения изменения дисперсии для квадратичного и линейного алгоритмов, $N=10$, $F=10^{-2}$, $d=0$

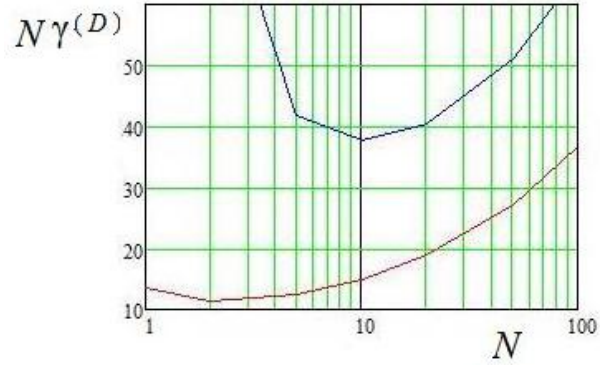


Рис. 4.1.2. Зависимость пороговых значений $N\gamma^{(0,5)}$ (нижняя кривая) и $N\gamma^{(0,9)}$ (верхняя кривая) от числа выборок N для $F=10^{-2}$

Имеет место оптимизационная задача, связанная с определением числа выборок, обеспечивающего минимум порогового значения при ограничении на отношение сигнал/шум. Эта задача соответствует задаче оптимального разнесения в системах связи, а также задаче оптимальной энергии в импульсе в радиолокации [5].

Если знак изменения дисперсии при альтернативе $H_1^{(2)}$ неизвестен, то односторонний алгоритм оказывается смещенным. Несмещенный алгоритм проверки H_0 против сложной альтернативы $\gamma \neq 0$ будет иметь два порога. При отсутствии сдвига плотности и при $\gamma \neq 0$ линейный накопитель u_1 слабо реагирует на увеличение масштаба и малоэффективен при гипотезе $H_1^{(2)}$. Его характеристика $D = 1 - \Phi(c_F / \sqrt{1 + \gamma})$ в зависимости от $\gamma \neq 0$ приведена пунктирными точками на рис. 4.1.1.

Обнаружение одновременного изменения математического ожидания и дисперсии гауссовского распределения

В этом случае задача различения гипотез $H_0: y_k \sim N(m_0, \sigma_0^2)$ и $H_1^{(2)}: y_k \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $k=1, \dots, N$, имеет четыре существенных параметра, и оптимальный алгоритм различения вытекает из отношения правдоподобия [4, 13]:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k - m_0}{\sigma_0} \right)^2 - \sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k - m_1}{\sigma_1} \right)^2 \geq k_T,$$

где порог $k_T = 2 \ln \left[(\sigma_1 / \sigma_0)^N \Lambda_T \right]$.

После ряда преобразований получаем алгоритм

$$\Delta \bar{y} + (\gamma / 2) s_0^2 \geq k'_T$$

в виде взвешенной суммы статистик $\bar{y} = \sum y_k / N$ и $s_0^2 = \sum (y_k - m_0)^2 / N$.

Пороговое значение $k'_T = \sigma_1^2 k_T / 2N + (m_1^2 - m_0^2) / 2$ зависит от всех четырех параметров. Разделив обе части неравенства на σ_0^2 / N , получаем алгоритм в виде

$$d_N u_1 + (\gamma / 2) u_2 \geq k_1,$$

где выделены две статистики: линейная $u_1 = \sqrt{N} \bar{y} / \sigma_0$ и квадратичная $u_2 = N s_0^2 / \sigma_0^2$. Здесь $d_N = d \sqrt{N}$ – дефлексия статистики u_1 , которая представляет собой отношение сигнал/шум на выходе линейного накопителя, а порог $k_1 = k'_T N / \sigma_0^2$. Таким образом, оптимальный *линейно-квадратичный* алгоритм для обнаружения известных изменений математического ожидания и дисперсии в общем случае включает взвешенное суммирование линейной и квадратичной статистик с весами d_N и $\gamma / 2$.

Если истинные значения существенных параметров d , γ и m_0 / σ_0 неизвестны, то возникает проблема априорной неопределенности, причем трудности проявляются как в выборе весовых коэффициентов, так и при установке порога. Конечно, алгоритм может использовать некоторые заданные значения этих параметров. В этом случае он утрачивает оптимальность и его характеристики ухудшаются.

Если точно известно, что $\gamma \neq 0$ (дисперсии различны), то при любом сдвиге Δ оптимальный алгоритм можно переписать в виде [13]

$$\sum_{k=1}^N (y_k - \rho)^2 \geq k_2,$$

где $\rho = m_0 - \Delta / \gamma$, а порог $k_2 = \sigma_1^2 k_T / \gamma + N [\rho^2 - m_0^2 + (m_1^2 - m_0^2) / \gamma]$.

При гипотезе H_0 случайные величины $y_k - \rho$ нормальны с математическими ожиданиями Δ / γ и дисперсиями σ_0^2 . Величина $u = (1 / \sigma_0^2) \sum_{k=1}^N (y - \rho)^2$

имеет нецентральное χ^2 -распределение $\chi'^2_N(a_0)$ с N степенями свободы и параметром нецентральности $a_0 = N d^2 / \gamma^2$. При гипотезе H_1 математические ожидания случайных величин $y_k - \rho$ становятся равными $\Delta(\gamma + 1) / \gamma$, а дисперсии – равными $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1 + \gamma)$. Величина $u / (1 + \gamma)$ будет иметь распределение $\chi'^2_N(a_1)$, где новый параметр нецентральности $a_1 = N d^2 (1 + \gamma) / \gamma^2$.

Таким образом, задача сводится к различению двух одномерных *нецентральных* χ^2 -распределений (или двух нецентральных Γ -распределений) с N степенями свободы и разными параметрами нецентральности.

Нецентральное распределение $\chi_N^2(a)$ с приемлемой для практики точностью можно аппроксимировать центральным [22], для которого имеются обширные таблицы. Пусть χ_f^2 есть центральное распределение с f степенями свободы. Выбором масштаба можно менять его математическое ожидание и дисперсию в целях аппроксимации заданного нецентрального распределения. Если $c\chi_f^2$ имеет те же самые математическое ожидание и дисперсию, что и нецентральное распределение $\chi_N^2(a)$, то $c = \frac{N+2a}{N+a}$,

$f = \frac{(N+a)^2}{N+2a}$. После такой аппроксимации получаем задачу различения двух одномерных *центральных* χ^2 -распределений с разными степенями свободы.

При гипотезе H_0 статистика u аппроксимируется статистикой $c_0\chi_{f_0}^2$, которая сравнивается с порогом Неймана – Пирсона U_{NP} , пропорциональным квантили центрального χ^2 -распределения с f_0 степенями свободы. При гипотезе H_1 статистика аппроксимируется величиной $(1+\gamma)c_1\chi_{f_1}^2$. Значения c_0 , f_0 , c_1 , f_1 вычисляются по вышеприведенным формулам, куда подставляются a_0 и a_1 соответственно.

Сплошная линия 1 на рис. 4.1.3 построена этим способом для оптимального линейно-квадратичного алгоритма $u \geq U_{NP}$ для $N=10$, $\gamma=1$. Характеристику линейно-квадратичного алгоритма можно сравнить с характеристиками соответственно линейного и квадратичного алгоритмов. Характеристика обнаружения линейного алгоритма, использующего статистику u_1 , для $N=10$, и для случая $\gamma=0$, когда имеется только сдвиг, приведена на рис. 4.1.3 пунктирными точками 4. Если наряду со сдвигом меняется дисперсия, т. е. $\gamma \neq 0$, то вероятность правильного обнаружения линейного алгоритма дается формулой $D = \Phi\left(\frac{d_N - c_F}{\sqrt{1+\gamma}}\right)$.

С увеличением γ характеристики этого алгоритма ухудшаются в области $D > 0,5$, что отражает штриховая линия 5, построенная для $\gamma=1$. Пороговые значения дефлекции равны $d_N^{(D,F)} = c_{1-D}\sqrt{1+\gamma} + c_F$, и при $\gamma > 0$ увеличиваются с ростом γ . Таким образом, увеличение дисперсии оказывает негативное влияние на работу линейного обнаружителя.

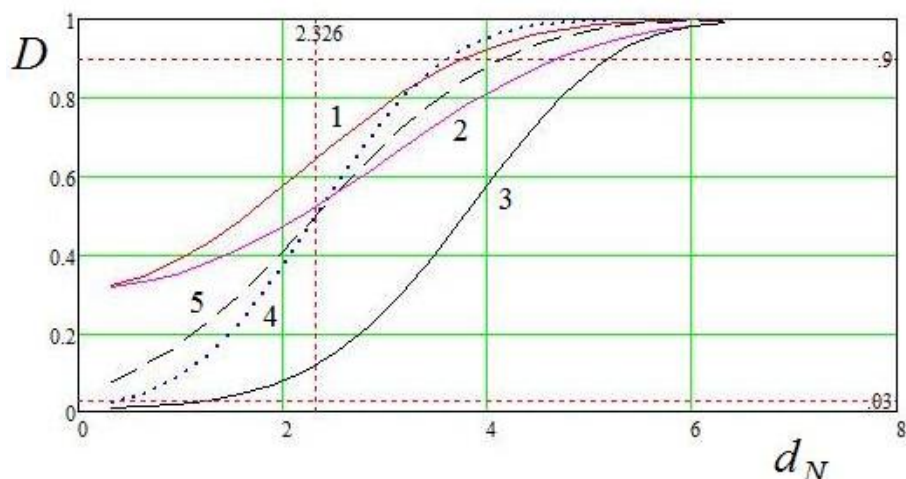


Рис. 4.1.3. Характеристики обнаружения одновременного изменения математического ожидания и дисперсии гауссовской выборки

В случае статистики u_2 одновременное увеличение сдвига и масштаба повышает вероятность обнаружения по сравнению со случаем $d = 0$, так как величина $u_2 / (1 + \gamma)$ приобретает нецентральное χ^2 -распределение $\chi_N'^2(a)$ с N степенями свободы и параметром нецентральности $a = Nd^2 / (1 + \gamma)$. Задача обнаружения при этом может быть записана в виде $H_0 : a = 0, H_1 : a > 0$.

Однако этот алгоритм несколько уступает линейно-квадратичному. Поэтому соответствующая линия 2 (рис. 4.1.3) располагается ниже линии 1. При данных параметрах квадратичный алгоритм уступает и линейному. Наличие одного сдвига без изменения дисперсии резко снижает эффективность обнаружения квадратичного алгоритма по сравнению с линейным. Характеристика обнаружения алгоритма $u_2 \geq U_2$ для $\gamma = 0$ изображена линией 3. Тем не менее этот алгоритм оказывается несмещенным и работоспособным при произвольном знаке сдвига.

Анализ характеристик обнаружения для общего линейно-квадратичного алгоритма в случае одновременного увеличения математического ожидания и дисперсии показывает, что существенные выигрыши в эффективности достигаются в тех случаях, когда хотя бы один из полезных параметров уменьшается и принимает «подпороговые» значения. При этом линейная статистика u_1 малоэффективна при увеличении дисперсии, а квадратичная статистика u_2 плохо обнаруживает сдвиги математического ожидания.

Представляют интерес случаи функциональной связи математического ожидания и дисперсии. Пусть математическое ожидание положительно и дисперсия пропорциональна математическому ожиданию $\sigma^2 = ct$, где c есть коэффициент пропорциональности, $c > 0$. Такая связь характерна,

например, для фотоприемников, работающих с пуассоновскими наблюдениями в режиме счета фотоэлектронов, а также в режиме интегрирования заряда. Пусть также значения γ пропорциональны начальному коэффициенту вариации $k_v = \sigma_0 / m_0$, т. е. $\gamma(d) = d \cdot k_v$. Чем больше $k_v = \sqrt{c / m_0}$, тем быстрее увеличивается γ с ростом дефлексии d .

На рис. 4.1.4 приведены характеристики оптимального алгоритма обнаружения при $N = 10$ для значений $k_v = 10$ (а) и $k_v = 0,5$ (б) соответственно для вероятности ложной тревоги $F = 0,01$. В первом случае (рис. 4.1.4, а) очевидно преимущество квадратичного накопителя по сравнению с линейным. Характеристика квадратичного алгоритма совпадает с характеристикой оптимального алгоритма (линия 1 на рис. 4.1.4, б).

Характеристика линейного алгоритма приведена штриховой линией 2. Пунктиром 3 показана характеристика линейного алгоритма при отсутствии изменения дисперсии ($\gamma = 0$). Сравнение показывает значительное негативное влияние изменения дисперсии выборки на характеристики линейного алгоритма.

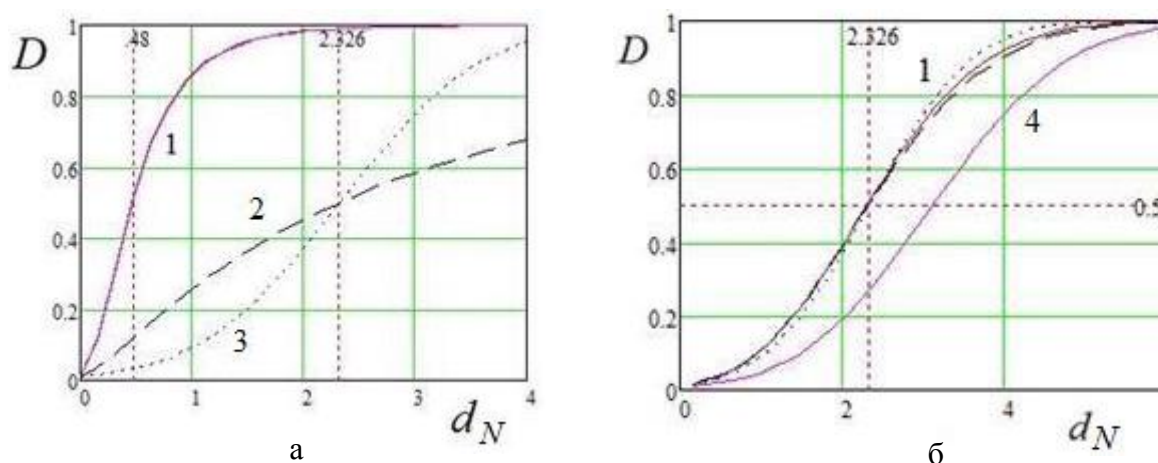


Рис. 4.1.4. Характеристики обнаружения при линейной связи дисперсии и математического ожидания выборки

Во втором случае (рис. 4.1.4, б) линейный накопитель близок к оптимальному обнаружителю (линия 1), а квадратичный накопитель дает худший результат (линия 4). Таким образом, в зависимости от начального коэффициента вариации лучшей оказывается линейная или квадратичная структура.

Приведенный анализ гауссовской задачи при независимых наблюдениях показывает влияние значений полезных параметров Δ и γ как на структуру, так и на характеристики рассмотренных алгоритмов. Это указывает на существенность и значимость этих параметров. Значения этих параметров определяют влияние каждой из двух достаточных статистик (линейной и квадратичной) на эффективность обнаружения.

Задания

1. Исследовать чувствительность характеристик рассмотренных алгоритмов к изменениям параметров m_0 и σ_0^2 .

2. Создать модель дискретного случайного поля с гауссовскими случайными величинами, рассчитать и установить пороги обнаружения и исследовать характеристики обнаружения для изменений математического ожидания и дисперсии. Сравнить с расчетными характеристиками.

3. Предложить адаптивный алгоритм обнаружения, использующий оценки неизвестных параметров по обучающей выборке, определить необходимое число выборочных значений.

4.2. Случай независимой негауссовской выборки

Во многих практически важных случаях наблюдения в независимой выборке имеют одинаковые распределения. Существует несколько полезных параметрических моделей для плотности распределения вероятностей. Одной из таких моделей является n -параметрическое экспоненциальное семейство [24, 25], для которого плотность вероятности равна

$$f(y) = A(y) \exp \left[\sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) u_i(y) - B(\theta) \right] = \exp \left[\sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) u_i(y) - B(\theta) - \Phi(y) \right],$$

где $\eta_i(\theta)$, $B(\theta)$, $\Phi(y)$ – некоторые функции многомерного параметра θ и выборки y ; $u_i(y)$ – статистики ($i=1, \dots, n$), которые являются достаточными при оценивании значений $\eta_i(\theta)$ по наблюдаемой выборке y . К этому семейству принадлежат уже рассмотренные параметрические модели распределений: гауссовское, Вейбулла, гамма, Пуассона и некоторые другие.

Примеры распределений из экспоненциального семейства:

1) распределение Пуассона

$$P(y = k) = (\lambda^k / k!) \exp(-\lambda) = \exp[\eta k - e^\eta + \ln(k!)],$$

где $\eta = \ln(\lambda)$;

2) экспоненциальное распределение

$$f(y) = (1/\beta) \exp(-y/\beta) = \exp[\eta y + \ln(-\eta)],$$

где $\eta = -1/\beta$;

3) Гауссовское (нормальное) распределение

$$f(y) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(y-m)^2/2\sigma^2).$$

При естественной параметризации $\eta_1 = m/\sigma^2$, $\eta_2 = -1/2\sigma^2$ существует достаточная статистика $u = (u_1, u_2)^T$, где $u_1 = y$, $u_2 = y^2$;

4) распределение Вейбулла

$$f(y) = (1/\beta)(y/\beta)^{\gamma-1} \exp(-(y/\beta)^\gamma) = (\beta)^{-\gamma} \exp[\eta_1 \ln(y) + \eta_2 y^\gamma],$$

где $\eta_1 = \gamma - 1$, $\eta_2 = -1/\beta^\gamma$;

5) логнормальное распределение

$$f(y) = (\sigma y \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(\ln(y/y_{\text{med}}))^2 / 2\sigma_l^2) = C(\eta) \exp[\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2],$$

где $\eta_1 = \ln(y_{\text{med}})/\sigma_l^2 - 1$, $\eta_2 = -1/2\sigma_l^2$, $u_1 = \ln(y)$, $u_2 = (\ln(y))^2$;

б) гамма-распределение

$$f(y) = (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))^{-1} y^{\alpha-1} \exp(-y/\beta) = C(\eta) \exp[\eta_1 y + \eta_2 \ln(y)],$$

где $\eta_1 = 1/\beta$, $\eta_2 = \alpha - 1$.

Обнаружение изменений параметров распределений

Для каждой из независимых выборок из экспоненциального семейства логарифм функции правдоподобия можно записать в естественно параметризованном виде

$$\ln f(y_k; \eta) = \eta u_k(y_k) - \Phi(y_k) - \Psi(\eta).$$

Если рассмотреть две гипотезы, для которых векторные параметры различаются, т. е. $H_0: \eta = \eta_0$ и $H_1: \eta = \eta_1$, то логарифм отношения правдоподобия для каждой k -й выборки равен

$$\ln \Lambda(y_k; \eta) = (\eta_1 - \eta_0)^T u(y_k) - \Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_0).$$

Тогда логарифм отношения правдоподобия для N независимых выборок $y = (y_1, \dots, y_N)$ равен

$$\ln \Lambda = \sum_{k=1}^N \ln \Lambda_k(y_k; \eta) = (\eta_1 - \eta_0)^T \sum_{k=1}^N u(y_k) - \Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_0).$$

Отсюда следует, что оптимальная решающая статистика (векторная) для проверки гипотез имеет вид $u = \sum_{k=1}^N u_k(y_k)$. Для рассмотренных приме-

ров эта статистика содержит суммы выборочных значений, суммы квадратов этих значений, суммы логарифмов и их квадратов. Также суммы могут содержать результаты нелинейных преобразований наблюдений других видов, например, вследствие ограничения, знакового или рангового преобразования.

Локально наиболее мощные обнаружители

Локально наиболее мощные (ЛНМ) алгоритмы включают накопление после нелинейного преобразования вида

$$\zeta(y_k) = \left(\partial \ln \Lambda(s, y_k) / \partial s \right)_{s=0} = (1/f(y_k)) \left(\partial f(y_k) / \partial s \right)_{s=0},$$

где $f(y_k)$ – плотность наблюдения при гипотезе H_1 . Таким образом, вид преобразования ЛНМ обнаружителя определяется формой плотности $f(y_k)$ и не зависит от распределения шума при гипотезе H_0 . Для гауссовской плотности преобразование будет линейным, а для лапласовской плотности $f_1(y_k) = (1/\beta) \exp(-|y_k - s_k|/\beta)$ входной преобразователь – идеальный («жесткий») ограничитель, характеристика которого есть знаковая функция. Локально наиболее мощный алгоритм является знаковым коррелятором [2] $u = \sum_{k=1}^N s_k \operatorname{sgn}(y_k)$, в другом варианте реализуется коррелятор

совпадения полярностей $u = \sum_{k=1}^N \operatorname{sgn}(s_k) \operatorname{sgn}(y_k)$. Промежуточное положение

между линейным коррелятором и коррелятором с «жестким» ограничением занимают *робастные* (устойчивые, от англ. Robust – крепкий) структуры с так называемым «мягким» ограничением: преобразователь делается линейным при слабых сигналах и постепенно приближается к «жесткому» ограничителю при сильных сигналах.

Расчет характеристик обнаружения для алгоритмов, использующих суммы случайных величин

Рассмотрим случай единственного полезного параметра, относительно изменения которого проверяется гипотеза. Полагаем остальные параметры плотности известными. При этом достаточно формировать одномерные решающие статистики $u_k(y_k)$. Независимость выборочных значений существенно облегчает задачу анализа характеристик алгоритма обнаружения

вида $u = \sum_{k=1}^N u_k(y_k)$, где случайные величины u_k имеют одинаковые плот-

ности вероятности $f_u(u_k)$ с конечными математическими ожиданиями m и дисперсиями σ^2 . Задача заключается в определении плотности вероятности $f(u)$ для суммы случайных величин и вычислении вероятности $P(u \geq u_T)$ превышения этой суммой порога u_T .

Существует класс распределений $f_u(u_k)$, которые сохраняют форму при суммировании случайных величин, тогда $f(u)$ оказывается *безгранично*

делимым распределением [29]. Примерами являются гауссовское и гамма-распределения, распределения Пуассона и Коши. В этом случае распределение суммы имеет такой же вид, как и распределение каждого из слагаемых, а меняются только параметры исходного распределения.

В общем случае плотность вероятности суммы независимых случайных величин определяется через свертку плотностей вероятности компонентов, вычисление которой достаточно сложно, особенно, если суммируются величины с разными распределениями. Это объясняет важность применения приближенных методов вычисления плотностей и вероятностей превышения порога.

Простейшим приближением для плотности суммы является *гауссовское приближение*. Распределение статистики u с ростом N стремится к нормальному с параметрами $m_u = Nm$ и $\sigma_u^2 = N\sigma^2$.

Для решающего правила $u \geq u_T$ вероятность превышения порога может быть рассчитана по формуле

$$P(u \geq u_T) \approx 1 - \Phi((u_T - m_u)/\sigma_u).$$

Однако точность такого метода не всегда удовлетворительна, особенно при вычислении малых значений вероятности. Попытки использования аппроксимаций плотностей конечных рядов Эрмита или Лагерра для улучшения оценок вероятностей оказываются малоэффективными, поскольку эти ряды плохо аппроксимируют «хвосты» распределений.

В тех случаях, когда известен вид *производящей функции моментов* (ПФМ) $\psi_u = \int_U e^{vu} f_u(u_k) du$ для плотности $f_u(u_k)$ каждого слагаемого, точ-

ность расчетов малых вероятностей может быть существенно улучшена. Для решающей статистики u , представляющей сумму независимых случайных величин, ПФМ есть $\Psi(v) = (\psi_u(v))^N$. Введем логарифм ПФМ $\mu(v) = \ln \Psi(v)$. Заметим, что ПФМ позволяет вычислить любой момент плотности $f(u)$ решающей статистики как соответствующую производную в точке $v = 0$, а также любой кумулянт по формуле $\kappa_n = (d^n \ln \Psi(v) / dv^n)_{v=0} = \mu^{(n)}(0)$.

Рассмотрим *сопряженное* семейство $p(u, \lambda)$ с параметром $\lambda > 0$, такое что $p(u, \lambda) = \exp(\lambda u) f(u) / \Psi(\lambda)$. Здесь $\lambda > 0$ – некоторая «подвешенная» вещественная переменная (в англ. литературе «titled variant»), изменение которой деформирует плотность вероятности $f(u)$ в область бóльших (или меньших) значений, чтобы обеспечить более точное вычисление вероятностей. Тогда вероятность превышения порога равна

$$P(u \geq u_T) = \int_{u_T}^{\infty} f(u) du = \Psi(\lambda) \int_{u_T}^{\infty} \exp(-\lambda u) p(u, \lambda) du.$$

Для сопряженной плотности $p(u, \lambda)$ используются аппроксимации или граничные выражения. Смысл ее применения состоит в том, что выбором параметра λ плотность деформируется и ее математическое ожидание смещается в сторону порога. Аппроксимация в окрестности ее вершины оказывается более продуктивной, чем аппроксимация плотности $f(u)$ в области ее «хвостов». В частности, сопряженную плотность в окрестности ее математического ожидания можно аппроксимировать гауссовской $p_a(u, \lambda) \sim N(m_\lambda, \sigma_\lambda^2)$ с параметрами m_λ и σ_λ^2 . Поскольку ПФМ сопряженной плотности есть $\varphi(v, \lambda) = \Psi(\lambda + v) / (\lambda)$, то ее математическое ожидание и дисперсию можно вычислить по формулам:

$$m_\lambda = (d \ln \varphi(v, \lambda) / dv)_{v=0} = d \ln \Psi(\lambda) / d\lambda = \mu'(\lambda); \quad \sigma_\lambda^2 = d^2 \ln \Psi(\lambda) / d\lambda^2 = \mu''(\lambda).$$

Подставляя выражение $p_a(u, \lambda) \sim N(m_\lambda, \sigma_\lambda^2)$ для гауссовской плотности вместо $p(u, \lambda)$, получаем

$$P(u \geq u_T) \approx \Psi(\lambda) \cdot [1 - \Phi(\sigma_\lambda \lambda + u_T - m_\lambda)] \cdot \exp(-m_\lambda \lambda + \sigma_\lambda^2 \lambda^2 / 2),$$

где значение λ определяет параметры аппроксимации m_λ и σ_λ .

Параметр λ можно выбрать из условия наилучшей аппроксимации в области порогового значения u_T , т. е. так, чтобы математическое ожидание m_λ сопряженной плотности $p(u, \lambda)$ совпало с порогом u_T . Для этого надо решить уравнение $u_T = m_\lambda = \mu'(\lambda)$ относительно λ , найти решение λ_a , и выбрать $\sigma_a^2 = \mu''(\lambda_a)$. Тогда

$$P(u \geq u_T) \approx [1 - \Phi(\sigma_a \lambda_a)] \cdot \exp[\mu(\lambda_a) - u_T \lambda_a + \sigma_a^2 \lambda_a^2 / 2].$$

Учитывая известную границу [5] для интеграла вероятности

$$1 - \Phi(z) < (1 / z \sqrt{2\pi}) \exp(-z^2 / 2),$$

получаем верхнюю границу для искомой вероятности в виде

$$P(u \geq u_T) < \exp(\mu(\lambda_a) - u_T \lambda_a) / (\sigma_a \lambda_a \sqrt{2\pi}).$$

Можно выбрать и другое значение параметра, решив уравнение $u_T = m_\lambda - \sigma_\lambda \lambda$, при этом аргумент интеграла вероятности равен нулю, тогда имеем следующее приближение (заметим, что порог оказался левее математического ожидания):

$$P(u \geq u_T) < (0,5) \exp(\mu(\lambda_a) - u_T \lambda_a + \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_a^2 \lambda_a^2 / 2).$$

Следует использовать то значение параметра, которое дает наименьшее значение для верхней границы. Эти выражения можно использовать для расчетов верхних границ вероятности ложной тревоги.

Имеется еще одна полезная граница, которая не использует гауссовскую аппроксимацию [5]. Вернемся к приведенному выше общему выражению. Для значений $\lambda \geq 0$ имеем $\exp(-\lambda u) \leq \exp(-\lambda u_T)$ при $u \geq u_T$. Тогда получаем следующую верхнюю границу вероятности превышения порога

$$P(u \geq u_T) \leq \exp(\mu(\lambda) - u_T \lambda) \int_{u_T}^{\infty} p(u, \lambda) du \leq \exp(\mu(\lambda) - \lambda u_T),$$

поскольку внутренний интеграл явно меньше единицы.

Полученную границу можно минимизировать по λ , дифференцируя экспоненциальную функцию по λ и приравнявая результат нулю, в результате опять имеем $u_T = m_\lambda = \mu'(\lambda)$. Поскольку функция $\mu(\lambda)$ выпуклая и $\mu''(\lambda) > 0$, решение будет существовать при $\mu'(\lambda) \leq u_T \leq \mu'(\infty)$. Порог u_T должен оказаться правее математического ожидания m_λ . В этом случае получается, что верхняя граница для вероятности $P(u \geq u_T) \leq \exp[\mu(\lambda_a) - \lambda_a u_T]$, где λ_a удовлетворяет уравнению $u_T = m_\lambda = \mu'(\lambda)$. Эта граница называется *границей Чернова*.

Расчет характеристик обнаружения для случая выборки из экспоненциального распределения

В этом случае имеются точные характеристики обнаружения, поэтому можно оценить степень приближения предложенных аппроксимаций.

Рассмотрим задачу обнаружения увеличения параметра масштаба для выборки из экспоненциального распределения: $H_0: y_k \sim E(\beta_0)$, $H_1: y_k \sim E(\beta_1)$, $k = 1, \dots, N$, $\beta_1 = \beta_0(1 + d)$, $d > 0$. Оптимальная решающая статистика является суммой выборочных значений $u = \sum_{k=1}^N y_k$. Ее распределение при

обеих гипотезах есть гамма-распределение $G(\alpha, \beta_i)$, причем $\alpha = N$, и различие будет только в параметрах масштаба. Задачу можно рассматривать как различие гамма-распределений $G(\alpha, \beta_0) - G(\alpha, \beta_1)$ с одинаковым параметром формы (разд. 3.5). Порог по критерию Неймана – Пирсона является соответствующей процентной точкой гамма-распределения для $i = 0$. Результат расчета вероятности как функции от порога u_T показан на рис. 4.2.1 сплошной линией 1 для значений $N = 10$, $\beta = 1$. Вероятность правильного обнаружения вычисляется через интеграл вероятности гамма-плотности [4] при $i = 1$.

С другой стороны, можно приближенно рассчитать эти вероятности через производящую функцию моментов для статистики u , которая записывается в виде $\Psi(v) = (1 - v\beta)^{-N}$. При этом $\mu(\lambda) = \ln \Psi(\lambda) = -N \ln(1 - \lambda\beta)$,

и можно выбрать такое значение параметра $\lambda = \lambda_a$, чтобы $\mu'(\lambda_a) = \beta N / (1 - \lambda_a \beta) = u_T$. Это значение равно $\lambda_a = 1/\beta - N/u_T$.

Граница Чернова $P_{CH}(u \geq u_T) \leq \exp[\mu(\lambda_a) - \lambda_a u_T]$ показана на рис. 4.2.1 штрих-пунктирной линией 2. Метод «подвешенной» переменной и гауссовская аппроксимация деформированной плотности дают выражение

$$P(u \geq u_T) \leq \exp[\mu(\lambda_a) - \lambda_a u_T + \sigma_a^2 \lambda_a^2 / 2] \cdot [1 - \Phi(\sigma_a \lambda_a)].$$

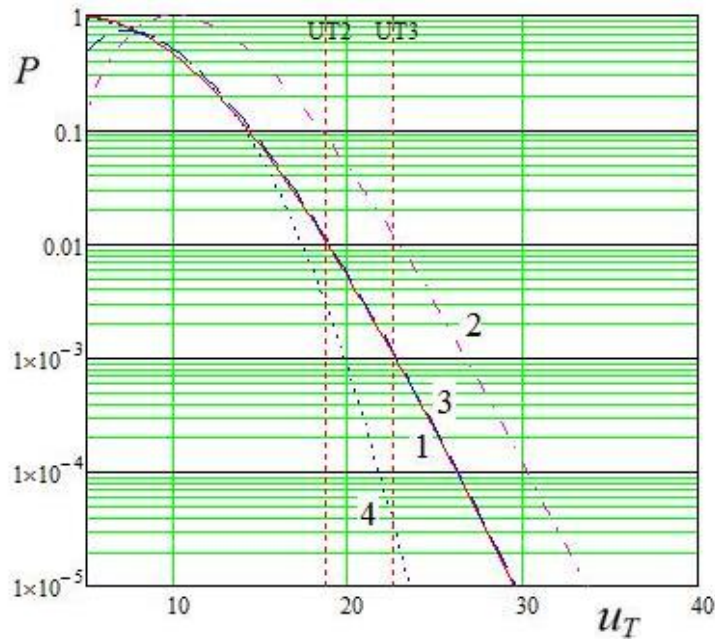


Рис. 4.2.1. Вероятности превышения порога для гамма-распределения

Соответствующие расчеты для $N = 10, \beta = 1$ показаны на рис. 4.2.1 линией 3. Результат очень хорошо совпадает с теоретическим. На графиках отмечены процентные точки $UT2 = 18,78$ и $UT3 = 22,66$, соответствующие вероятностям $F = 10^{-2}$ и $F = 10^{-3}$

Таким образом, данный метод здесь позволяет существенно улучшить аппроксимацию зависимости по сравнению с границей Чернова. Если вместо гамма-распределения для статистики u использовать нормальное распределение $N(m_u, \sigma_u^2)$, где $m_u = N\beta, \sigma_u^2 = N\beta^2$, то расчеты дают заниженные значения вероятностей, показанные на рис. 4.2.1 пунктирной кривой 4.

Задания

1. Рассчитать точные и приближенные характеристики обнаружения изменения масштаба гамма-распределения при других значениях $N = 10, 20, 50$. Сравнить с гауссовским приближением. Определить границы применимости метода «подвешенной переменной».

2. Решить задачу приближенного расчета характеристик для другого способа выбора порога $u_T = m_\lambda - \sigma_\lambda \lambda$. Сравнить с предыдущими результатами.

3. Найти вероятность превышения заданного порога суммой N независимых случайных величин, каждая из которых получена логарифмированием случайных величин со стандартным гамма-распределением $G(\alpha, 1)$.

Результирующая статистика $u = (1/N) \sum_{k=1}^N \ln y_k$. Использовать характеристи-

ческую функцию статистики u : $\Psi_u(j\nu) = \Gamma^N(\alpha + j\nu/N)/\Gamma(\alpha)$, найти кумулянты решающей статистики через дигамма-функцию $\psi(x) = d \ln \Gamma(x) / dx$ и ее производные, и применить метод «подвешенной» переменной. Рассчитать характеристики обнаружения для изменений параметра формы исходного гамма-распределения.

4. Найти вероятность превышения заданного порога суммой N независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Вейбулла. Рассчитать характеристики обнаружения для изменений параметра масштаба и параметра формы.

5. Рассчитать границы и приближенные выражения для вероятностей ошибок при обнаружении изменения масштаба N -мерной независимой выборки из логнормального распределения: $H_0: y_k \sim LN(y_{\text{med } 0}, k_\nu)$, $H_1: y_k \sim LN(y_{\text{med } 1}, k_\nu)$, где $y_{\text{med } 1} > y_{\text{med } 0}$. Сравнить со случаем с гауссовским и экспоненциальным распределениями.

6. Рассчитать границы и приближенные выражения для вероятностей ошибок при обнаружении изменения коэффициента вариации N -мерной независимой выборки из логнормального распределения: $H_0: y_k \sim LN(y_{\text{med}}, k_{\nu 0})$, $H_1: y_k \sim LN(y_{\text{med}}, k_{\nu 1})$, где $k_{\nu 1} > k_{\nu 0}$. Сравнить со случаем изменения параметра масштаба.

4.3. Общая гауссовская задача

Общая гауссовская задача включает рассмотрение M гипотез, причем для гипотезы H_i наблюдение (N -мерное) $y \sim N(m_i, R_i)$ имеет гауссовское распределение с матрицей (столбцом) математических ожиданий m_i и ковариационной матрицей R_i размера $(N \times N)$. Часто $(N \times 1)$ -мерные матрицы-столбцы называют *векторами*, имея в виду возможность представления их в соответствующем линейном пространстве [26]. При этом задание матрицы-столбца определяет координаты точки в некоторой системе координат и направление относительно начала координат.

Пусть существует матрица Q_i , обратная к R_i , т. е. выполняется соотношение $Q_i R_i = I$, где I – единичная матрица размера $(N \times N)$, содержащая

единицы на главной диагонали. Тогда плотность вероятности вектора y при гипотезе H_i ($i = 1, \dots, M$) определяется выражением

$$f_i(y) = (2\pi)^{-N/2} |R_i|^{-1/2} \exp \left\{ -(y - m_i)^T Q_i (y - m_i) / 2 \right\},$$

где $|R_i|$ обозначает определитель матрицы R_i , T – символ транспонирования. Выражение в показателе экспоненты содержит скаляр, который называется квадратичной формой.

Для бинарной задачи ($M = 2$) оптимальная для различения статистика представляет собой разность двух квадратичных форм:

$$u = (y - m_0)^T Q_0 (y - m_0) - (y - m_1)^T Q_1 (y - m_1).$$

Каждая из квадратичных форм представляет собой расстояние Махаланобиса между случайным вектором y и его математическим ожиданием [27].

Статистика u сравнивается с порогом $u_T = 2 \ln \Lambda_T + \ln |R_1| - \ln |R_0|$, [5]. Здесь Λ_T – байесовский порог. В случае критерия Неймана – Пирсона порог определяется через плотность вероятности $w_0(u)$ решающей статистики при нулевой гипотезе. Нетрудно видеть, что обработка включает линейную и квадратичную части.

Случай равных ковариационных матриц $R_1 = R_0$ представляет особый интерес, поскольку соответствует различению детерминированных сигналов на фоне коррелированного шума. Достаточная статистика линейна по наблюдениям $u_l = \Delta m^T Q y$, где $\Delta m = m_1 - m_0$ – разностный вектор, а качество различения определяется величиной d , квадрат которой равен $d^2 = \Delta m^T Q \Delta m$ (расстояние Махаланобиса между двумя векторами). Вероятности перепутывания сигналов одинаковы и равны полной вероятности ошибки при равновероятных сигналах $P_e = 1 - \Phi(d)$.

Если компоненты наблюдения y некоррелированы и имеют равные дисперсии σ^2 (случай дискретного белого шума), то d соответствует *расстоянию* между двумя векторами-средними, деленному на среднеквадратичное отклонение σ , и представляет собой дефлекцию решающей статистики u . Достаточная статистика является скалярным произведением (проекцией) наблюдаемого вектора на среднюю разность векторов Δm . Квадраты норм сигналов (эквиваленты энергии) $S_1^2 = m_1^T m_1$ и $S_0^2 = m_0^T m_0$ часто выбираются равными. Тогда коэффициент корреляции сигналов можно определить как $\rho = m_1^T m_0 / S$. Дефлекция при этом равна $d = \sqrt{2(1-\rho)S} / \sigma$, она максимальна и равна $2S / \sigma$ для противоположных сигналов, у которых $\rho = -1$. В случае ортогональных сигналов $\rho = 0$ и дефлекция меньше в $\sqrt{2}$ раз.

При произвольном M различение сигналов с одинаковой энергией на фоне шума по правилу максимального правдоподобия сводится к определению сигнала, имеющего с y максимальную корреляцию $m^T y$. При равновероятных сигналах имеется так называемая *аддитивная граница* полной вероятности ошибки: $P_e < (M - 1)[1 - \Phi(d)]$.

Случай равных векторов-средних $m_1 = m_0 = m$ и разных ковариационных матриц приводит к оптимальной квадратичной обработке (формированию квадратичной формы). Для комплексных огибающих

$$u = (y - m)^+ (Q_0 - Q_1)(y - m) = (y - m)^+ H (y - m),$$

где символ «+» обозначает комплексное (эрмитово) сопряжение (сопряжение и транспонирование вектора).

Если компоненты y некоррелированы при обеих гипотезах (различение шумовых процессов), т. е. ковариационные матрицы диагональны: $R_0 = \sigma_0^2 I$, $R_1 = \sigma_1^2 I$, то оптимальным является *энергетический* приемник

$$u_E = y^T y = \sum_{k=1}^N |y_k|^2.$$

Если $R_0 = \sigma_0^2 I$, $R_1 = \sigma_1^2 I + R_S$, где R_S представляет корреляционную матрицу сигнала, то $Q_0 = (1/\sigma_0^2)I$, $Q_1 = (1/\sigma_0^2)[I + (1/\sigma_0^2)R_S]^{-1}$. Используя тождества $(I + A)^{-1} = I - A(I + A)^{-1}$ и $(A + I)^{-1} = I - (I + A)^{-1}A$, получаем [5]

$$H = Q_0 - Q_1 = (1/\sigma_0^2)[\sigma_0^2 I + R_S]^{-1} R_S = (1/\sigma_0^2)R_S (\sigma_0^2 I + R_S)^{-1}.$$

В случае медленно флуктуирующего сигнала его корреляционная матрица $R_S = \sigma_S^2 s s^+$, где $s = (s_1, \dots, s_N)^T$ — детерминированный сигнальный вектор. В этом случае матрица $R_1 = \sigma_0^2 I + \sigma_S^2 s s^+$ легко обращается методом пополнения. Используя тождество $(A + uv^+)^{-1} = A^{-1} - (1/\gamma)A^{-1}uv^+A^{-1}$, где u и v — векторы-столбцы, $\gamma = 1 + v^+A^{-1}u$, получаем выражение

$$Q_1 = (\sigma_0^2 I + \sigma_0^2 s s^+)^{-1} R_S = (1/\sigma_0^2)[I - (q^2/\gamma)s s^+],$$

где $q^2 = \sigma_1^2/\sigma_0^2$ — отношение сигнал/шум по мощности; $\gamma = 1 + q^2 s^+ s$. При нормировке $s^+ s = 1$ имеем $\gamma = 1 + q^2$, и ядро обработки принимает вид $H = (1/\sigma_0^2)s s^T q^2 / (1 + q^2)$.

Пусть $m = 0$, тогда оптимальная статистика выражается в виде $u = c |s^+ y|^2$, где $c = (1/\sigma_0^2)q^2 / (1 + q^2)$. В этом случае обработка сводится

к когерентному накоплению (согласованной фильтрации) и квадратичному детектированию. Эквивалентной статистикой будет формирование огибающей после накопления $|s^+ y|$.

Задания

1. Вычислить расстояние Махаланобиса между двумя случайными векторами одинаковой размерности при $m_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$ и $m_1 = (1, -1, 1, -1, \dots)^T$ с одинаковой ковариационной матрицей, элементы которой равны $R_{i,j} = \sigma^2 \exp(-\alpha|i-j|)$, $\alpha > 0$. Что изменится, если корреляционная матрица примет вид $R_{i,j} = \sigma^2 \exp(-\alpha(i-j)^2)$? Какова будет ситуация при некоррелированности векторов, т. е. при $R = \sigma^2 I$?

2. Рассчитать расстояние Баттачари для предыдущей задачи. Сравнить с расстоянием Махаланобиса.

4.4. Корреляционный обнаружитель детерминированного сигнала

Классической является задача обнаружения сигнала известной формы $s(t)$ с известными параметрами на фоне аддитивного гауссовского шума $\eta(t)$ со спектральной плотностью мощности $N_0(f)$, В²/Гц. Эта величина обычно относится к области положительных частот, т. е. является *односторонней* плотностью. Мощность шума $P_{ш} = \int_0^{\infty} N_0(f)df$, где пределы интегрирования определяются полосой пропускания системы.

Пусть на вход обнаружителя в течение времени T поступает наблюдение с выхода линейной части приемника (УПЧ) $y(t) = s(t - \tau_D) + \eta(t)$, содержащее сигнал известной формы $s(t)$, приходящий с временной задержкой τ_D , и белый гауссовский шум $\eta(t)$. Пусть сигнал имеет конечную длительность T_c , меньшую времени наблюдения T , причем сигнал полностью попадает в интервал наблюдения. Наблюдение регистрируется в течение интервала времени T , не меньшего $\tau_D + T_c$.

Оптимальный обнаружитель формирует *корреляционный интеграл* $z = \int_0^T y(t)s(t)dt$ и сравнивает его с порогом z_T , величина которого зависит от выбранного критерия. В отсутствие полезного сигнала (гипотеза H_0) корреляционный интеграл есть гауссовская случайная величина $z \sim N(0, \sigma_z^2)$, а при его появлении (гипотеза H_1) изменяется только математическое

ожидание $z \sim N(E_c, \sigma_z^2)$, где $E_c = \int_0^{T_c} s^2(t) dt$ есть энергия сигнала. Это справедливо в случае одинаковых энергий полезного и опорного сигналов. При этом дисперсия корреляционного интеграла $\sigma_z^2 = E_c N_0 / 2$, где спектральная плотность мощности шума на входе полагается постоянной в полосе частот системы (интегратора). Таким образом, после вычисления корреляционного интеграла задача сводится к обнаружению сдвига гауссовского распределения с постоянной дисперсией (разд. 2.1).

Отношение сигнал/шум (по напряжению) на входе пороговой схемы определяется как дефлексия корреляционного интеграла $d = E_c / \sigma_z = \sqrt{2E_c / N_0}$, и оно является наибольшим среди всех возможных решающих статистик.

Для формирования корреляционного интеграла наблюдения $y(t)$ подвергаются обработке, которая может быть корреляционной или фильтровой. Структура корреляционного обнаружителя приведена на рис. 4.4.1. На второй вход перемножителя подается опорный сигнал $s(t)$, который задерживается на время τ_1 , и при неточно известном времени прихода сигнала возможно отличие этой задержки от τ_D на величину $\tau = \tau_1 - \tau_D$. Кроме того, даже при совпадении формы опорного сигнала с принимаемым возможны отличия амплитуд и фаз этих сигналов, которые обсуждаются далее.

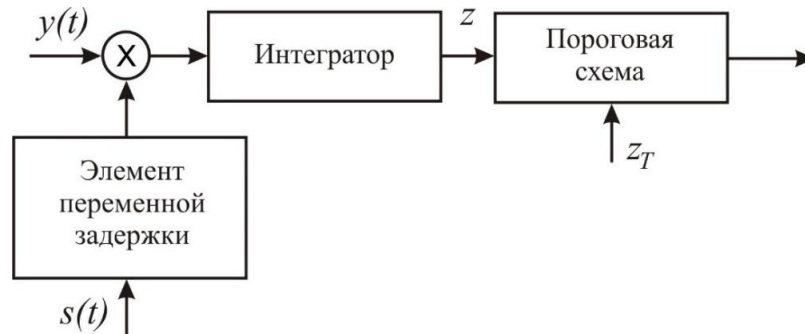


Рис. 4.4.1. Структура корреляционного обнаружителя детерминированного сигнала

Таким образом, коррелятор реализует операцию

$$z(t, \tau_D, \tau_1) = \int_{t-T_c}^t y(t') s(t' - \tau_1) dt'.$$

Для сравнения с порогом берется значение $z(t_1, \tau)$ в момент $t_1 = \tau_1 + T_c$, который соответствует окончанию опорного сигнала. Если сигналы $s(t - \tau_D)$ и $s(t - \tau_1)$ отличаются только задержками, то выходное напряжение интегратора в момент времени $t_1 = \tau_1 + T_c$ содержит сигнальную и помеховую составляющие:

$$z_c(t_1, \tau) = \int_{t_1 - T_c}^{t_1} s(t' - \tau_D) s(t' - \tau_1) dt', \quad z_{\text{ш}}(t_1) = \int_{t_1 - T_c}^{t_1} \eta(t') s(t' - \tau_1) dt'.$$

В момент t_1 , выбранный для сравнения с порогом, имеем значение $z(t_1, \tau) = z_c(t_1, \tau) + z_{\text{ш}}(t_1)$. Нетрудно видеть, что сигнальная составляющая равна значению временной автокорреляционной функции полезного сигнала

$$\psi_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') s(t' - \tau) dt'$$

при данном значении τ . Эта функция при

$\tau = 0$ равна энергии сигнала, и только в этом случае на выходе формируется требуемый для оптимального обнаружения корреляционный интеграл $z = z(t_1, 0)$.

Формирование сигнальной составляющей корреляционного интеграла иллюстрируется на рис. 4.4.2 для случая обнаружения полезного сигнала $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, состоящего из двух периодов синусоиды с частотой $f_0 = 200$ Гц (период $T_0 = 5$ мс), длительностью $T_c = 10$ мс, задержанного на $\tau_D = 20$ мс. В данном случае амплитуда сигнала $A = 1$ В, начальная фаза $\varphi_0 = 0$ и опорный сигнал совпадает с принимаемым, т. е. $\tau_1 = \tau_D$. Тогда максимальное значение сигнальной составляющей равно энергии сигнала $E_c = A^2 T_c / 2 = 5 \text{ В}^2 \text{ мс}$. На рис. 4.2.2 выход коррелятора нормирован к этому значению.

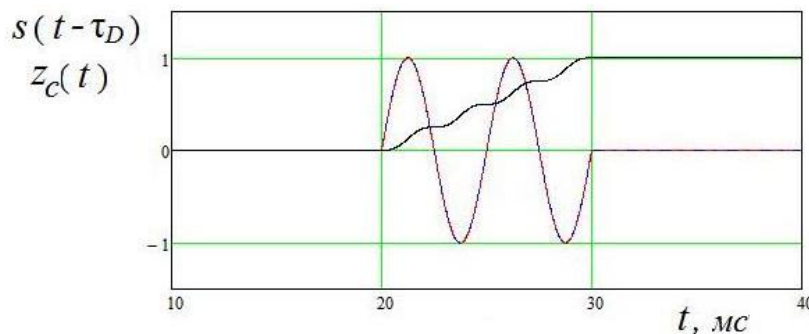


Рис. 4.4.2. Формирование сигнальной составляющей корреляционного интеграла

При отличии задержки опорного сигнала от принимаемого максимальное значение сигнальной составляющей уменьшается, что отражено на рис. 4.4.3 (показано нормированное к энергии значение). Здесь $\tau_D = 20$ мс, $\tau_1 = 19$ мс. Опорный сигнал дан штрих-пунктиром.

Выясним, как зависит энергия синусоидального импульса от начальной фазы. Нетрудно убедиться, что энергия сохраняет не зависящее от начальной фазы значение только на интервалах измерения, кратных полупериоду синусоиды.

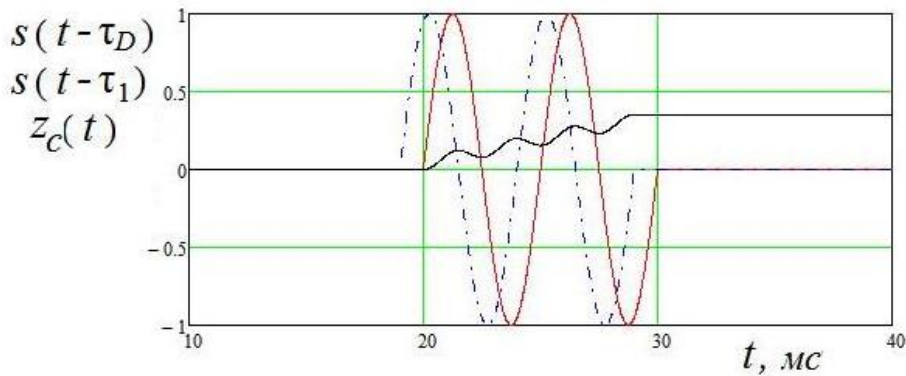


Рис. 4.4.3. Формирование сигнальной составляющей на выходе коррелятора

На рис. 4.4.4, а, показано, как меняется нормированная энергия сигнала (на двух периодах синусоиды) с ростом интервала измерения. Сплошная линия 1 соответствует начальной фазе $\varphi_0 = 0^\circ$ штрих-пунктирная линия 2 $-\varphi_0 = 90^\circ$ а пунктирная линия 3 $-\varphi_0 = 30^\circ$.

Величина $E(t, \varphi_0) = \int_0^t A^2 \sin^2(2\pi f_0 t' + \varphi_0) dt'$ достигает максимального

значения E_c при $t = T_c$. Имеют место колебания значений энергии относительно линейной зависимости (средней энергии) $E_m(t) = t / E_c$, где E_c – полная энергия сигнала за время $T_c = 10$ мс. Эта прямая линия дана штрихами.

Колебания энергии $DE(t, \varphi_0)$ показаны на рис. 4.4.4, б, в виде разностей между нормированной энергией $E_0(t) = E(t, \varphi_0) / E_c$ и линией $E_m(t)$. Они имеют амплитуды 0,04 для начальных фаз для $\varphi_0 = 0^\circ$ и $\varphi_0 = 90^\circ$. При $\varphi_0 = 30^\circ$ колебания энергии приобретают положительное либо отрицательное смещение (положительное смещение показано на рис. 4.4.4, б, и оно будет максимальным по абсолютной величине для начальных фаз, кратных $\varphi_0 = 45^\circ$. Проявление этих колебаний энергии тем меньше, чем больше полная энергия сигнала E_c , т. е. чем больше периодов колебаний в импульсе.

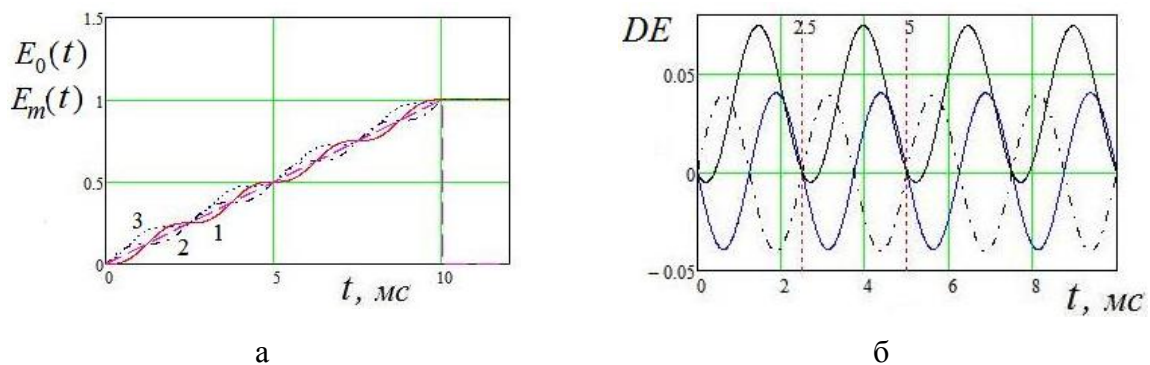


Рис. 4.4.4. Зависимость энергии от начальной фазы импульса

Формирование выходного напряжения коррелятора с учетом шумовой составляющей представлено на рис. 4.4.5 для случая $\varphi_0 = 0^\circ$. Синусоидальный сигнал изображен сплошной линией. Отношение сигнал/шум на входе составляло $d = 6,8$. Выходное напряжение коррелятора для случая $\tau_1 = \tau_D$ представлено линией 1. Оно представляет собой нестационарный случайный процесс с возрастающим математическим ожиданием (с учетом колебаний энергии при различных начальных фазах, рис. 4.4.4, а).

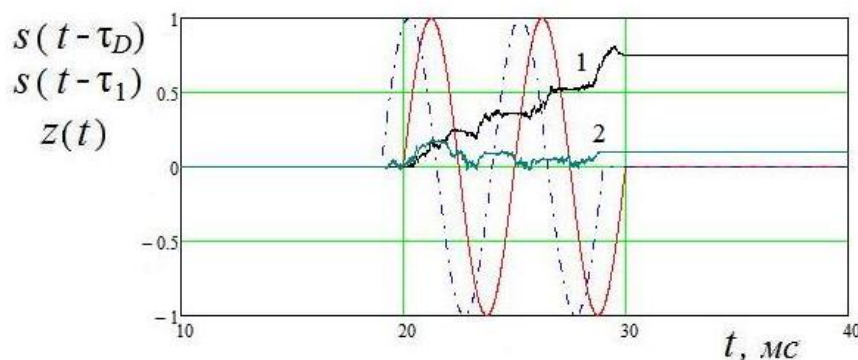


Рис. 4.4.5. Формирование выходного напряжения коррелятора

Шумовая составляющая в момент сравнения с порогом есть случайная величина с гауссовским распределением вероятности, нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_z^2 = E_{c1}N_0 / 2$, где E_{c1} – энергия опорного сигнала. Для стационарного шума эта величина не зависит от момента времени t_1 .

Значение корреляционного интеграла получается только в момент окончания полезного сигнала, а до этого происходит процесс накопления энергии в сигнальной составляющей. В данном случае коррелятор обеспечивает максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе (на входе пороговой схемы) $d_{\max}^2 = E_c^2 / \sigma_z^2 = 2E_c / N_0$. При полностью известной форме полезного сигнала и его параметрах (времени запаздывания и начальной фазе) коррелятор обеспечит указанное максимальное отношение сигнал/шум независимо от конкретной формы сигнала. Это позволяет изменять форму и распределять энергию полезного сигнала во времени, обеспечивая другие характеристики обработки (точность оценивания параметров и разрешение).

В случае $\tau_1 \neq \tau_D$ процесс накопления энергии происходит менее эффективно. Соответствующий опорный сигнал $s(t - \tau_1)$ показан на рис. 4.4.5 штрих-пунктирной линией для $\tau_1 = 19$ мс. Накопление энергии идет только в течение перекрытия полезного и опорного сигналов, а шумовая составляющая формируется, как и раньше, в течение интервала длительности опорного сигнала. В результате выходное напряжение по окончании

процесса имеет меньшее математическое ожидание (линия 2), и отношение сигнал/шум на выходе падает. К тому же при этом появляется зависимость выходного отношения сигнал/шум от формы и параметров сигналов.

Различие начальных фаз полезного и опорного сигналов влияет на выходное напряжение коррелятора аналогичным образом, уменьшая сигнальную составляющую, которая может принимать нулевые и даже отрицательные значения в соответствии с видом автокорреляционной функции полезного сигнала.

Порог обнаружения z_T и характеристики обнаружения рассчитываются в соответствии с выбранным критерием оптимальности, с учетом того что корреляционный интеграл является гауссовской случайной величиной при обеих гипотезах. Для критерия Неймана – Пирсона $z_{NP} = c_F \sigma_z$, где c_F – процентная точка стандартного нормального распределения. В данном случае величина $\sigma_z = \sqrt{E_{c1} N_0 / 2}$ содержит энергию опорного сигнала, которая известна. Энергия полезного сигнала при этом может быть любой, она не является существенным параметром (не определяет структуру обнаружителя), однако влияет на характеристики обнаружения.

В случае критерия максимального правдоподобия при равенстве энергий полезного и опорного сигналов порог обнаружения $z_{ML} = E_c / 2$, тогда алгоритм минимизирует суммарную вероятность ошибок. При этом несущественным (не влияющим на порог, но очень значимым) параметром оказывается общая дисперсия σ_z^2 . Если энергия полезного сигнала отличается от энергии опорного (что является обычной ситуацией при приеме), то при гипотезе H_1 корреляционный интеграл получает мультипликативный множитель, который влияет как на математическое ожидание, так и на дисперсию решающей статистики. Для такого случая байесовские пороги обнаружения заранее рассчитать не удастся. Эту трудность можно обойти для практических задач различения ортогональных или противоположных сигналов равной энергии (в системах связи), когда значение порога различения выбирается нулевым.

Высокая чувствительность коррелятора к возможным случайным изменениям задержки полезного сигнала, а также к фазовым отличиям полезного и опорного сигналов является одним из недостатков корреляционного обнаружителя. Достоинством коррелятора является относительная легкость изменения опорного сигнала, что открывает возможность адаптации корреляционных структур.

Задания

1. Моделировать корреляционный обнаружитель в Matlab. Исследовать влияние различных отклонений от принятой модели на процесс обнаружения [30].

2. Сравнить корреляционный обнаружитель с линейным накопителем и энергетическим приемником, который накапливает квадраты наблюдений.

4.5. Фильтровой обнаружитель детерминированного сигнала

Линейный фильтр выполняет операцию свертки входного напряжения $y(t)$ с импульсной характеристикой фильтра $h(t)$, которая представляет его отклик на входной дельта-импульс. Линейность фильтра означает выполнение *принципа суперпозиции*, т. е. реакция фильтра на взвешенную сумму входных сигналов представляет собой взвешенную сумму реакций на каждый из входных сигналов (свойства однородности и аддитивности преобразований).

Интеграл свертки на выходе фильтра можно записать в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t y(t')h(t-t')dt' = \int_0^{\infty} h(t'')y(t-t'')dt''.$$

Здесь учтено, что отклик фильтра не может опережать входной сигнал, т. е. $h(t'')=0$ при $t'' < 0$. В частотной области алгоритм фильтрации соответствует перемножению спектральной функции входного напряже-

ния $Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\exp(-j\omega t)dt$ с комплексным коэффициентом передачи

фильтра $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j\omega t)dt$. Иначе говоря, спектральная функция

на выходе $\Xi(j\omega) = Y(j\omega)H(j\omega)$, тогда выходной сигнал линейного фильтра определяется через обратное преобразование Фурье:

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)H(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega.$$

Оптимальный обнаружитель детерминированного сигнала на фоне белого гауссовского шума включает формирование корреляционного интеграла. Это возможно с использованием линейного фильтра, *согласованного* с формой полезного сигнала (понятие согласованного фильтра было предложено Норсом [28]). Такое согласование означает, что импульсная характеристика фильтра и его комплексный коэффициент передачи связаны с формой полезного сигнала.

Потребуем, чтобы в некоторый момент времени t_1 выходное напряжение линейного фильтра было пропорционально (с вещественным коэффициентом пропорциональности $c > 0$) корреляционному интегралу:

$$z = \int_0^T y(t)s(t)dt, \text{ т. е. } \quad \xi(t) = \int_{-\infty}^{t_1} y(t)h_{\text{СФ}}(t_1 - t)dt = c \int_0^T y(t)s(t - \tau_D)dt.$$

Ясно, что момент времени t_1 должен быть равен (по крайней мере не меньше) времени, необходимого для полного приема полезного сигнала, длительность которого равна T_c , т. е. $t_1 \geq \tau_D + T_c$. С учетом конечной длительности полезного сигнала, конечной импульсной характеристики фильтра и достаточной величины задержки при обработке пределы интегрирования в двух интегралах, представленных в последней формуле, можно считать одинаковыми. Отсюда следует, что оптимальный (согласованный) фильтр будет иметь импульсную характеристику $h_{\text{СФ}}(t) = cs(t_0 - t)$, где собственная задержка фильтра $t_0 \geq T_c$ должна быть не меньше длительности полезного сигнала.

Структура фильтрового обнаружителя приведена на рис. 4.5.1, где СФ – согласованный фильтр, ВС – временной селектор. Обнаружитель включает линейный фильтр с импульсной характеристикой $h_{\text{СФ}}(t) = cs(t_0 - t)$, которая представляет собой сдвинутое зеркальное изображение формы полезного сигнала. В этом заключается смысл согласования фильтра во временной области.

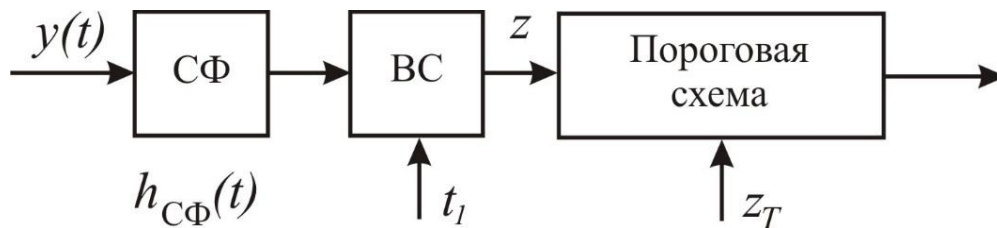


Рис. 4.5.1. Структура фильтрового обнаружителя

Согласованный фильтр имеет комплексный коэффициент передачи

$$H_{\text{СФ}}(j\omega) = cS_c^*(j\omega)\exp(-j\omega t_0),$$

где $S_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega t)dt$ – спектральная функция полезного сигнала,

комплексное сопряжение учитывает обратное время, а экспоненциальный множитель отражает собственную задержку фильтра на время t_0 . В результате амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) согласованного фильтра полностью повторяет форму амплитудного спектра сигнала, а фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра такова, что в момент времени $t_1 = t_0 + \tau_D$ взаимные фазовые сдвиги между спектральными составляющими сигнала компенсируются, и они суммируются в фазе, обеспечивая

максимальный эффект, пропорциональный энергии полезного сигнала. В этом и заключается смысл согласования фильтра с формой полезного сигнала в частотной области.

Выходной сигнал фильтра $\xi(t)$ селектируется в момент времени $t_1 = t_0 + \tau_D = T_c + \tau_D$, который учитывает собственную задержку фильтра, равную длительности полезного сигнала, и временное запаздывание принимаемого полезного сигнала. В этот момент и должен быть сформирован корреляционный интеграл.

Формирование сигнальной составляющей на выходе согласованного фильтра показано на рис. 4.5.2 для случая обнаружения полезного сигнала $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, состоящего из двух периодов синусоиды с частотой $f_0 = 200$ Гц (период $T_0 = 5$ мс), длительностью $T_c = 10$ мс, задержанного на $\tau_D = 20$ мс. В данном случае амплитуда сигнала $A = 1$ В, начальная фаза $\varphi_0 = 0$. Полезный сигнал показан штриховыми линиями, а положение импульсной характеристики фильтра – пунктирными линиями.

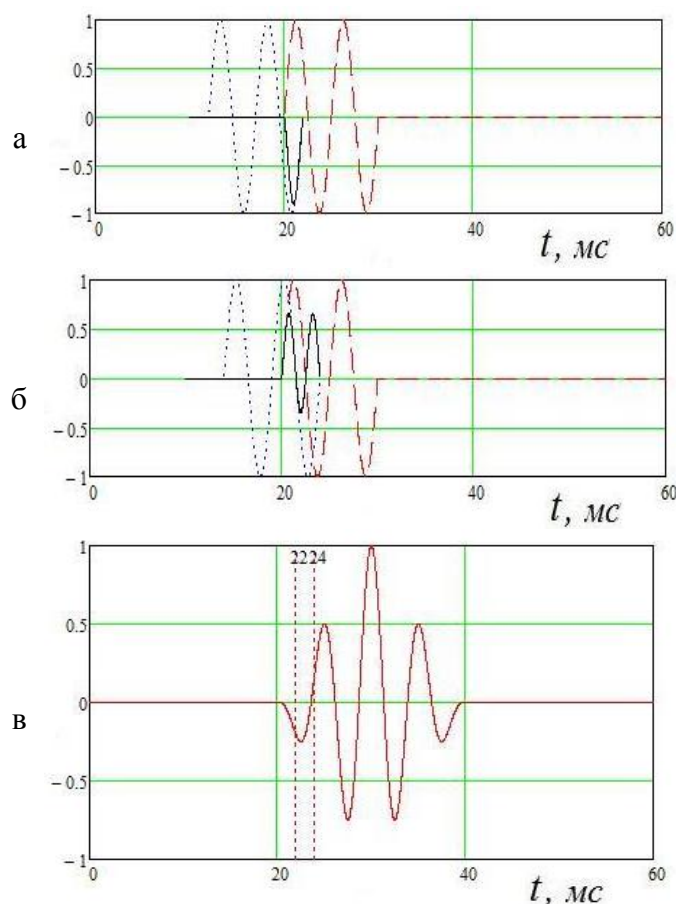


Рис. 4.5.2. Формирование сигнальной составляющей на выходе согласованного фильтра

Рисунки 4.5.2, а, б, даны для моментов времени $t = 22$ мс и $t = 24$ мс соответственно. Сплошными линиями показаны произведения перекры-

вающихся частей принимаемого сигнала $s(t' - \tau_D)$ и импульсной характеристики $h_{\text{СФ}}(t - t')$. Эти произведения интегрируются и дают значения сигнальной составляющей, которая показана на рис. 4.5.2, в.

В целом сигнальная составляющая на выходе согласованного фильтра полностью воспроизводит временную автокорреляционную функцию полезного сигнала:

$$\begin{aligned}\xi(t, t_1) &= c \int_{-\infty}^t s(t' - \tau_D) s(t_0 + t' - t) dt' = \\ &= c \int_0^{\infty} s(t - t'') s(t_1 - \tau_D - t'') dt'' = c\psi_E(t - t_1).\end{aligned}$$

В момент времени $t = t_1 = T_c + \tau_D$ имеем максимальный эффект $\xi(t_1, t_1) = c\psi_E(0) = cE_c$. Если начальная фаза принимаемого полезного сигнала отличается от той, на которую настроен фильтр, то вид сигнальной составляющей сохраняется, однако максимум достигается раньше или позже ожидаемого времени t_1 . Таким образом, остается возможность обнаружения сигнала путем нахождения и сравнения с порогом максимального значения выходного напряжения фильтра. Очевидно, что выход согласованного фильтра в этом смысле инвариантен ко времени задержки (и к начальной фазе) полезного сигнала.

Шумовая составляющая на выходе фильтра

$$\xi_{\text{ш}}(t, t_1) = c \int_{-\infty}^t \eta(t') s(t_1 - \tau_D + t' - t) dt' = c \int_0^{\infty} \eta(t - t'') s(t_1 - \tau_D - t'') dt''$$

представляет коррелированный гауссовский случайный процесс (окрашенный шум) с корреляционной функцией, которая уже не зависит от моментов t и t_1 , а лишь от их разности $\tau = t - t_1$, т. е. $R_{\text{ш}}(\tau) = c^2(N_0/2)\psi_E(\tau)$,

где $\psi_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt$ – временная автокорреляционная функция сигнала.

При выводе использовано фильтрующее свойство дельта-функции в функции корреляции белого шума $R_{\eta}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$. Таким образом, шумовая составляющая на выходе согласованного фильтра по виду оказывается «сигналоподобным» случайным процессом, что заметно на рис. 4.5.3, где представлено результирующее напряжение на выходе согласованного фильтра. Отношение сигнал/шум на входе составляло $d = 6,8$.

Отношение сигнал/шум на выходе СФ зависит от момента времени и максимально лишь в момент $t_1 = T_c + \tau_D$. В этот момент, который выделяется временным селектором, оно является максимально возможным среди

всех линейных фильтров $d = E_c / \sigma_z = \sqrt{2E_c / N_0}$, и совпадает с таковым для коррелятора. Влияние шума проявляется в случайном смещении по времени максимума временной автокорреляционной функции сигнала и возникновении «нормальной» ошибки в пределах сигнального пика этой функции.

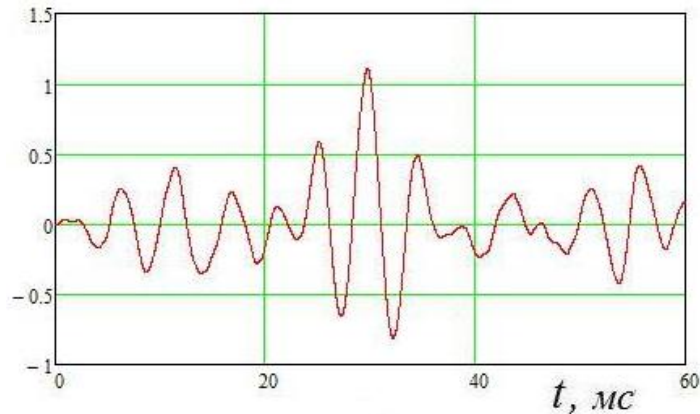


Рис. 4.5.3. Напряжение на выходе согласованного фильтра

Проблема неточного знания времени прихода полезного сигнала (и его начальной фазы) существует и для фильтрового обнаружителя. Однако здесь возможно обойтись без использования многоканальных структур, поскольку фильтр формирует максимум при появлении сигнала на выходе в любом случае, и задача сводится лишь к его фиксации. Таким образом, фильтровой обнаружитель менее чувствителен (по сравнению с коррелятором) к неточному заданию времени прихода полезного сигнала. При неизвестной начальной фазе полезного сигнала максимум напряжения можно получить путем амплитудного детектирования.

Поскольку шумовая составляющая «сигналоподобна», возможно выделение случайного шумового выброса и принятие его за сигнальный выброс, что приводит к возникновению так называемой «аномальной ошибки». Эти ошибки также приводят к ложным тревогам и пропускам полезного сигнала. Они весьма существенны при оценивании неизвестного времени прихода сигнала, их величины могут значительно превышать ширину главного пика автокорреляционной функции полезного сигнала.

Задания

1. Моделировать фильтровой обнаружитель в Matlab. Исследовать влияние различных отклонений от принятой модели на процесс обнаружения [30].
2. Сравнить фильтровой обнаружитель с корреляционным обнаружителем, линейным накопителем и энергетическим приемником, который накапливает квадраты наблюдений.

4.6. Фильтрация детерминированного сигнала в дискретном времени

В случае дискретного времени имеются отсчеты наблюдений $y = (y_1, \dots, y_N)^T$, содержащие отсчеты полезного сигнала $s = (s_1, \dots, s_N)^T$, и независимые отсчеты шума с дисперсией σ^2 , так что $y = s + \eta$. Корреляционный интеграл принимает вид $z = \sum_{k=1}^N y_k s_k = y^T s$, или для комплексных

амплитуд $z = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N y_k^* s_k = \operatorname{Re} \frac{1}{2} y^+ s$, где «+» обозначает комплексное (эрмитово) сопряжение.

Формирование корреляционного интеграла производится напрямую коррелятором, либо фильтром с конечной импульсной характеристикой $h = (h_1, \dots, h_N)^T$, который формирует свертку $z = \sum_{i=k-N}^k y_i h_{k-i}$. Эта статистика сравнивается с порогом, значение которого рассчитывается в соответствии с выбранным критерием.

Введем обращенный вектор импульсной характеристики $\bar{h} = (h_N, \dots, h_1)^T$. Отношение сигнал/шум (квадрат дефлекции решающей статистики) на выходе фильтра $d^2 = (\bar{h}^T s)^2 / \sigma^2 (\bar{h}^T \bar{h})$. Согласно неравенству Коши – Буняковского – Шварца $(\bar{h}^T s)^2 \leq (\bar{h}^T \bar{h}) (s^T s)$, откуда максимальное значение $d^2 = (s^T s)^2 / \sigma^2 = E_c / \sigma^2$. Для согласованного дискретного фильтра $\bar{h}_{\text{СФ}} = cs$, где c – ненулевая константа. В этом и только в этом случае неравенство Коши – Буняковского – Шварца обращается в равенство. Таким образом, импульсная характеристика согласованного фильтра (СФ) является зеркальной версией полезного сигнала, сдвинутой вправо на N отсчетов: $h_k = s_{N-k}$.

Отметим, что согласованный фильтр обеспечивает максимальное отношение сигнал/шум на выходе в классе линейных устройств независимо от статистики шума, которая может быть и негауссовской. Однако при негауссовской статистике шума возможно использование нелинейных устройств, существенно улучшающих качество обнаружения.

В случае различения двух детерминированных сигналов s_1 и s_2 на фоне некоррелированного шума формируются две статистики: $u_i = y^T s_i - E_i / 2$,

$i = 1, 2$, где $E_i = \|s_i\|^2 = \sum_{k=1}^N |s_{i,k}|^2$ – энергия (квадрат нормы) каждого из сигналов.

Решение принимается в пользу того сигнала, статистика которого больше. Характеристики различения существенно зависят от расстояния

$\|s_1 - s_2\|$ между сигналами (эквивалентной энергии). Ясно, что максимальное расстояние возникает между противоположными сигналами, которые обеспечивают наилучшее различение.

В случае коррелированного шума задача обнаружения и различения сигналов несколько усложняется. Пусть имеется N -мерное дискретное наблюдение $y = As + \eta$, где A – скалярный амплитудный множитель. Наблюдение содержит коррелированный шум η с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $R_\eta = M\{\eta\eta^T\}$. Сигнальный вектор здесь нормирован таким образом, что $s^T s = 1$.

Наблюдение y поступает на вход линейного фильтра с матрицей-строкой весовых коэффициентов $G = (g_1, \dots, g_N)$, который формирует скалярный выходной сигнал

$$z = Gy = AGs + G\eta = z_c + z_{ш},$$

где z_c и $z_{ш}$ представляют сигнальную и шумовую составляющие на выходе, причем математическое ожидание шума равно нулю, как на входе, так и на выходе.

Определим отношение сигнал/шум (по мощности) на выходе фильтра как отношение квадрата сигнальной составляющей к дисперсии шумовой составляющей $\sigma_{ш}^2 = M\{z_{ш}^2\} = GR_\eta G^T$, т. е. $q^2 = A^2 |z_c|^2 / \sigma_{ш}^2 = A^2 |z_c|^2 / GR_\eta G^T$. Обозначим $f_1(G) = Gs$, $f_2(G) = GR_\eta G^T$, и найдем вектор-строку G_* , который обеспечивает максимум величины q^2 . Пользуясь правилами дифференцирования скалярной функции по векторному аргументу, запишем необходимое условие экстремума q^2 по значениям вектора G :

$$\nabla q^2 = 2A^2 f_1(G) [\nabla f_1(G) \cdot f_2(G) - \nabla f_2(G) \cdot f_1(G)] / f_2^2(G) = 0,$$

где $\nabla = d / dG = [\partial / \partial g_1, \dots, \partial / \partial g_N]$ – оператор градиента (вектор-строка).

Отсюда получаем уравнение $GR_\eta G^T s^T = s^T G^T GR_\eta$, которое переходит в равенство при подстановке $G_* R_\eta = cs^T$. Это выражение представляет собой дискретный вариант уравнения, определяющего оптимальный (согласованный) линейный фильтр. Здесь $c \neq 0$ – произвольная ненулевая вещественная константа.

Если существует обратная матрица R_η^{-1} , что часто имеет место, то получаем матрицу весовых коэффициентов оптимального фильтра, который максимизирует отношение сигнал/шум на выходе, в виде

$$G_* = cs^T R_\eta^{-1}.$$

Заметим, что при выводе не делалось никаких предположений относительно функции распределения аддитивного шума, кроме его нулевого математического ожидания и вида корреляционной матрицы. Этот фильтр оптимален в классе линейных фильтров, его можно получить и другим путем.

Представим корреляционную матрицу шума R_η в форме произведения $R_\eta = R_\eta^{1/2} R_\eta^{1/2}$, что возможно, так как матрица R_η положительно определена. Пусть также существует матрица $R_\eta^{-1/2}$, обратная к $R_\eta^{1/2}$, т. е. $R_\eta^{1/2} R_\eta^{-1/2} = I_N$. Тогда

$$q^2 = A^2 \left(GR_\eta^{1/2} R_\eta^{-1/2} s \right)^2 / GR_\eta G^T = A^2 \left(\sum_1^N a_j b_j \right)^2 / \sum_1^N a_j^2,$$

где введены обозначения $a_j = \sum_1^N g_i (R_\eta^{1/2})_{i,j}$, $b_j = \sum_1^N (R_\eta^{-1/2})_{i,j} s_i$.

Применяя неравенство Коши – Буняковского – Шварца для сумм

$$\left(\sum_1^N a_j b_j \right)^2 \leq \sum_1^N a_j^2 \cdot \sum_1^N b_j^2,$$

получаем

$$q^2 \leq A^2 \sum_1^N b_j^2 = A^2 (s^T R_\eta^{-1} s) = q_{\max}^2.$$

Легко убедиться, что равенство $q^2 = q_{\max}^2$ достигается при пропорциональности $GR_\eta^{1/2}$ и $R_\eta^{-1/2}s$, т. е. при $G_* = cs^T R_\eta^{-1}$. В этом случае $z = G_* y = cs^T R_\eta^{-1} y$. Для некоррелированного шума $R_\eta^{-1} = \sigma_\eta^{-2} I_N$, и вектор весовых коэффициентов фильтра совпадает с вектором $s^T = (s_1, \dots, s_N)$, описывающим форму полезного сигнала $G_* = cs^T$, тогда $z = G_* y = cs^T y = c \sum_1^N y_i s_i$. Импульсная характеристика будет равна $h_i = s_{N-i}$, и фильтр будет *согласованным* (фильтром Норса).

В общем случае максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра $q_{\max}^2 = A^2 (s^T R_\eta^{-1} s) = A (G_* R_\eta^{-1} G_*^T) / c^2$ зависит от вида корреляционной матрицы шума R_η . Введя матрицу собственных векторов $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ для корреляционной матрицы R_η , будем иметь соотношение $\Phi^T R_\eta \Phi = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, где собственные значения $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ положительны и могут быть расположены в порядке их возрастания. Они соответствуют

собственным векторам (Φ_1, \dots, Φ_N) , которые образуют ортонормированный базис: $\Phi_i^T \Phi_j = 0$ [8]. Тогда матрица R_η представляется в виде $R_\eta = \Phi^T \Lambda \Phi$ (каноническое разложение).

Пусть собственный вектор Φ_1 соответствует минимальному собственному значению $\lambda_1 = \lambda_{\min}$, а вектор Φ_N – максимальному $\lambda_N = \lambda_{\max}$. Для корреляционных матриц шумов, которые являются симметричными и положительно определенными (для всех ненулевых векторов квадратичная форма $x^T R_\eta x > 0$, такое представление (в ортонормированном базисе) существует всегда, а значения собственных чисел всегда вещественны и положительны, поскольку они являются дисперсиями некоррелированных компонент).

Можно рассмотреть задачу оптимального выбора формы полезного сигнала $s^T = (s_1, \dots, s_N)$, такого чтобы обеспечить максимум отношения сигнал/шум именно для данной корреляционной матрицы [17].

Если полезный сигнал выбран так, что коэффициенты фильтра пропорциональны компонентам вектора Φ_1 , т. е. $G_* = cs^T = c\Phi_1^T / \lambda_{\min}$, то максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра будет определяться минимальным собственным значением корреляционной матрицы шума:

$$q_{\max}^2 = A(G_* R_\eta^{-1} G_*^T) / c^2 = A^2 \Phi_1^T \Phi \Lambda \Phi^T \Phi_1 = A^2 / \lambda_{\min}.$$

Этот результат открывает путь оптимизации формы полезного сигнала обнаружителя в соответствии с предполагаемым видом корреляционной матрицы помехи.

Отметим, что фильтр Норса (и согласованный фильтр) производят весьма существенные искажения формы полезного (входного) сигнала. Фильтр Норса обеспечивает в классе линейных фильтров максимальное отношение сигнал/шум независимо от вида распределения шума (при заданной корреляционной матрице R_η), что говорит о его ценных непараметрических свойствах.

Рекурсивный вариант фильтра

Рассмотрим теперь рекурсивный вариант алгоритма фильтрации, который работает в условиях нестационарных помех. Пусть уравнение наблюдения для k -го шага имеет вид $y_k = A_k s_k + \eta_k$, где помехи $\{\eta_k\}$ имеют корреляционные матрицы $R_\eta(k)$, а векторы η_k и η_l взаимно независимы при $k \neq l$. Алгоритм пошаговой линейной фильтрации представляется в виде $z_k = G_k y_k$, $k = 1, 2, \dots$

Получение последовательности векторов $\{G_1, G_2, \dots, G_k, \dots\}$ возможно путем рекурсивного решения уравнений $\nabla q_k^2 = 0$. Для этого воспользуемся градиентным методом: $G_{k+1} = G_k + \mu_k \nabla q_k^2(G_k)$, где $\mu_k > 0$ – некоторая постоянная (часто полагается постоянной $\mu_k = \mu$).

Градиент в формуле имеет вид

$$\nabla q_k^2 = 2a_k \left[s_k^T - a_k G_k R_\eta(k) \right],$$

где $a_k = G_k s_k / G_k R_\eta(k) G_k^T$. Можно показать, что величины a_k с увеличением числа шагов все слабее зависят от векторов G_k и стремятся к постоянному значению $a > 0$. Поэтому алгоритм рекурсивного вычисления коэффициентов фильтра можно приближенно записать в виде $G_{k+1} = G_k + \gamma_k [s_k - a_k G_k R_\eta(k)]$, где $\gamma_k = 2a\mu_k > 0$.

Фактически это выражение представляет собой решение уравнения $G_* R_\eta = c s^T$ методом градиентного спуска. Алгоритм применим также в условиях нестационарного шума. При вычислениях последнего выражения нет необходимости обращать матрицу помех $R_\eta(k)$, что является несомненным достоинством рекурсивного алгоритма фильтрации. В качестве начального значения G_1 может быть выбран вектор s_1^T . Алгоритм сходится к установившемуся значению G_* , причем значения γ_k и постоянной a влияют лишь на скорость его сходимости.

Алгоритмы фильтрации с подстройкой коэффициентов фильтра образуют довольно широкий класс фильтров, допускающих адаптацию в условиях неизвестных и меняющихся характеристик входных процессов. Однако введение адаптации по входным сигналам выводит эти процедуры из класса линейных, и для их надежной работы необходимо исследовать вопросы их сходимости и устойчивости.

Задания

1. Моделировать рекурсивный фильтр в Matlab для корреляционной матрицы помех с элементами $R_\eta(k)_{i,j} = \sigma^2 r^{|i-j|}$. Исследовать целесообразность использования рекурсивного фильтра в задаче обнаружения импульса на фоне коррелированных и некоррелированных помех.

2. Сравнить рекурсивный и нерекурсивный фильтры для помех различного спектра с корреляционными матрицами $R_\eta(k)_{i,j} = \sigma^2 r^{|i-j|}$ и $R_\eta(k)_{i,j} = \sigma^2 r^{2|i-j|}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин, Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – 2-е изд., Кн. 2. – М. : Радио и связь, 1975.
2. *Левин, Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – Кн. 3. – М. : Радио и связь, 1976.
3. *Тихонов, В. И.* Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982.
4. *Волков, В. Ю.* Адаптивные, инвариантные и робастные методы обнаружения и различения сигналов : учеб. пособие : часть 1 / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2005; часть 2 / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2008; часть 3 / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2012.
5. *Ван Трис, Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1 : пер. с англ. / Г. Ван Трис. – М. : Сов. радио, 1972.
6. *Фомин, Я. А.* Статистическая теория распознавания образов / Я. А. Фомин, Г. Р. Тарловский. – М. : Радио и связь, 1986.
7. *Репин, В. Г.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем / В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский. – М. : Сов. радио, 1977.
8. *Фукунага, К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов : пер. с англ. / К. Фукунага. – М. : Наука, 1979.
9. *Миленький, А. В.* Классификация сигналов в условиях неопределенности / А. В. Миленький. – М. : Сов. радио, 1975.
10. *Гуткин, Л. С.* Проектирование радиосистем и радиоустройств : учеб. пособие / Л. С. Гуткин. – М. : Радио и связь, 1986. – 288 с.
11. Прикладная статистика : Основы моделирования и первичная обработка данных : справочное издание / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин ; под ред. С. А. Айвазяна. – М. : Финансы и статистика, 1983.
12. *Леман, Э.* Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М. : Наука, 1979.
13. *Кендалл, М.* Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М. : Наука, 1973.
14. *Казаринов, Ю. М.* Радиотехнические системы / Ю. М. Казаринов. – М. : Высшая школа, 1990.
15. *Тихонов, В. И.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 2004.
16. *Poor, H. V.* Robust Decision Design Using a Distance Criterion / H. V. Poor. – IEEE Trans. – 1980. – Sept. – V. IT-26, N 5. – P. 575–587.
17. *Шахтарин, Б. И.* Обнаружение сигналов : учеб. пособие для вузов / Б. И. Шахтарин. – 3-е изд. испр. – М. : Горячая линия – Телеком, 2015.
18. *Иган, Дж.* Теория обнаружения и анализ рабочих характеристик / Дж. Иган. – М. : Наука, 1983.
19. *Питмен, Э.* Основы теории статистических выводов : пер. с англ. / Э. Питмен. – М. : Мир, 1986.
20. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979.

21. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М Рыжик. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.
22. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983.
23. Борисов, Ю. П. Математическое моделирование радиосистем : учеб. пособие для вузов / Ю. П. Борисов. – М. : Сов. радио, 1976.
24. Hudson, H. M. A natural identity for exponential families with applications in multiparameter estimation / H. M. Hudson // Ann. Statist. – 1978. – V. 6, № 3. – P. 473–484.
25. Morris, C. N. Unifying the Named Natural Exponential Families and their Relatives / C. N. Morris, K. F. Lock // Journal: American Statistician. – Amer. Statist. – 2009. – V. 63, № 3. – P. 247–253.
26. Френкс, Л. Теория сигналов : пер. с англ. / Л. Френкс. – М. : Сов. радио, 1974.
27. Дуда, Р. Распознавание образов и анализ сцен : пер. с англ. / Р. Дуда, П. Харт. – М. : Мир, 1976.
28. Хелстром, К. Статистическая теория обнаружения сигналов : пер. с англ. / К. Хелстром. – М. : ИЛ, 1963.
29. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королук, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985.
30. Волков, В. Ю. Математические методы в теории радиотехнических систем. Программы моделирования в Matlab : учеб. пособие / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2018.



08000574

Волков Владимир Юрьевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
*ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ***

Учебное пособие

Редактор *И. И. Щенсяк*

План издания 2018 г., п. 19а

Подписано к печати 30.03.2018
Объем 6,25 усл.-печ. л. Тираж 26 экз. Заказ 823

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ
193232 СПб., пр. Большевиков, 22

Отпечатано в СПбГУТ

